Journal of Lie Theory
Volume **??** (??) ??–??

Version of 24 juin 2019

Exemples d'algèbres de Lie de champs de vecteurs de type Heisenberg

D. Cerveau / D. Garba Belko

Résumé. Nous étudions des algèbres de Lie de champs de vecteurs holomorphes qui sont isomorphes des algèbres de Heisenberg de dimension 3. Nous montrons que ces algèbres ont un rang générique supérieur ou égal à deux. Nous nous attachons présenter beaucoup d'exemples non difféomorphes. En dimension deux d'espace nous obtenons sous certaines conditions une classification qui utilise celle des formes normales des germes de champs de vecteurs $\mathbb{C}_{,0}$.
Mathematics Subject Classification 2010: 17B66, 37L10, 32S65.
Key Words and Phrases: champ de vecteurs, algèbre de Lie, formes normales.

Résumé. We study the Lie algebras of holomorphic vector fields that are isomorphic to Heisenberg algebra of dimension three. We show that these algebras have generic rank superior or equal to two. In dimension two we get under some conditions a classification which uses the normal forms of holomorphic vector fields of $\mathbb{C}_{,0}$.
Mathematics Subject Classification 2010: 17B66, 37L10, 32S65.
Key Words and Phrases: champ de vecteurs, algèbre de Lie, formes normales.

Introduction

On note $\mathcal{H}$ l'algèbre de Lie du groupe de Heisenberg

$$\mathcal{H} := \{M_{\alpha,\beta,\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \gamma \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}\}.$$

On a les relations suivantes:
$[M_{1,0,0}, M_{0,1,0}] = M_{0,0,1}$, $[M_{1,0,0}, M_{0,0,1}] = 0$ et $[M_{0,1,0}, M_{0,0,1}] = 0$
qui caractérisent les algèbres de Lie abstraites isomorphes à $\mathcal{H}$. On constate que $[\mathcal{H}, \mathcal{H}] = \mathbb{C}.M_{0,0,1}$ est le centre de $\mathcal{H}$.

Dans cet article on s'intéresse aux algèbres de Lie de champs de vecteurs holomorphes qui sont isomorphes à $\mathcal{H}$, avec une attention particulière au cas de la dimension ambiante 2. La présentation ci-dessus de $\mathcal{H}$ comme algèbre de matrices peut être comprise, comme l'algèbre de Lie engendrée par les champs de vecteurs linéaires:

$$X = x_1 \frac{\partial}{\partial x_2},\ Y = x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} \text{ et } Z = x_1 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

que nous appelerons représentation standard.

On note $\mathcal{O}_n = \mathcal{O}(\mathbb{C},{}^n{}_0)$ l'anneau des germes de fonctions holomorphes à l'origine de $\mathbb{C}^n$, $\hat{\mathcal{O}}_n$ son complété formel identifié à l'anneau des séries formelles en n variables $(x_1, ..., x_n)$. On désigne par $\mathcal{M}_n$ le corps des fractions de $\mathcal{O}_n$, ie le corps des germes de fonctions méromorphes à l'origine de $\mathbb{C}^n$. Un élément f de $\mathcal{M}_n$ sera dit pur ou vraiment méromorphe si ni f ni $\frac{1}{f}$ n'est holomorphe. On désigne par $\hat{\mathcal{M}}_n$ le corps des fractions de $\hat{\mathcal{O}}_n$.

On note $\mathcal{X}_n$ l'algèbre de Lie des germes de champs de vecteurs à l'origine de $\mathbb{C}^n$; c'est un $\mathcal{O}_n$-module et l'on note $\hat{\mathcal{X}}_n$ son complété formel.

Par $\bigwedge_n^p = \bigwedge^p(\mathbb{C},{}_0^n)$ on désigne le $\mathcal{O}_n$-module des germes de p-formes différentielles holomorphes. Enfin $Diff_n = Diff(\mathbb{C},{}_0^n)$ est le groupe des germes de difféomorphismes holomorphes qui fixent l'origine de $\mathbb{C}^n$.

Si $X \in \mathcal{X}_n$ et $f \in \mathcal{O}_n$ on note $X.f = i_X df$ la dérivée de f suivant X. Si $x_1, ..., x_n$ est un système de coordonnées et $X = \sum X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, alors $X.f = \sum X_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$. Si $X.f = 0$ on dit que f est une intégrale première holomorphe de X. On a la même notion d'intégrale première méromorphe lorsque $f \in \mathcal{M}_n$.

On note $\mathcal{I}(X) \subset \mathcal{O}_n$ le sous anneau des intégrales premières de X.

Soit $\mathcal{L}$ un sous espace vectoriel de $\mathcal{X}_n$; on note $r(\mathcal{L})$ le nombre maximal d'éléments $X_1, ..., X_r$ de $\mathcal{L}$ qui sont $\mathcal{O}_n$-indépendants: si $\sum f_i X_i = 0$, alors les f_i sont identiquement nuls. On a évidemment $r(\mathcal{L}) \leq n$. On note $\mathcal{L}_0$ l'évaluation de $\mathcal{L}$ en 0:

$$\mathcal{L}_0 := \{X(0), X \in \mathcal{L}\}$$

et $r_0(\mathcal{L}_0)$ la dimension de $\mathcal{L}_0$: $r_0(\mathcal{L}_0) = dim_{\mathbb{C}}\mathcal{L}_0$. On a bien sûr $r_0(\mathcal{L}_0) \leq r(\mathcal{L})$.

Soient $X_i \in \mathcal{X}_n$, $i \in I$; on note $\langle X_i, i \in I\rangle$ le $\mathbb{C}-$ espace vectoriel engendré par les X_i.

Dans toute la suite on considère des sous algèbres $\mathcal{L} \subset \mathcal{X}_n$ isomorphes à $\mathcal{H}$, ie des représentations fidèles de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{X}_n$; X, Y, Z désignera une base de $\mathcal{L}$ telle que Z engendre $[\mathcal{L}, \mathcal{L}]$ et $Z = [X, Y]$.

Deux algèbres $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ sont conjuguées s'il existe $\Phi \in Diff_n$ tel que $\Phi_*\mathcal{L}' = \mathcal{L}$. Soit $X \in \mathcal{X}_n$ un champ de vecteurs, on note $C(X) := \{Z \in \mathcal{X}_n / [X, Z] = 0\}$; c'est une sous algèbre de $\mathcal{X}_n$. On remarque que si f appartient à $\mathcal{I}(X)$ alors fX appartient à $C(X) : \mathcal{I}(X).X \subset C(X)$.

Dans [2] A. Lins Neto et l'un des auteurs proposent un certain nombre de calculs d'algèbre $C(X)$ en particulier en dimension 2. Par exemple si le champ X a une seule courbe invariante (séparatrice) irréductible alors $C(X) = \mathcal{I}(X).X$; comme nous le verrons ceci est une obstruction pour qu'un tel X fasse partie d'une algèbre de Heisenberg.

Si $r(\mathcal{L}) = 3$ en un point générique, $\mathcal{L}$ est conjuguée à l'algèbre engendrée par $X = \frac{\partial}{\partial x_2}$, $Y = x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3}$ et $Z = \frac{\partial}{\partial x_1}$. Pour $n = r(\mathcal{L}) = 3$ on déduira que les feuilletages de codimension 1, $\mathcal{F}_t$ définis par Z et $X_t = X + tY$ sont intégrables au sens de Liouville.

Toujours en dimension 3, lorsque $r(\mathcal{L}) = 2$, l'algèbre $\mathcal{L}$ définit un feuilletage $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ de codimension 1. L'exemple de l'algèbre engendrée par $X = \frac{\partial}{\partial x_1}$, $Z = a_1(x_2, x_3)\frac{\partial}{\partial x_1} + a_2(x_2, x_3)\frac{\partial}{\partial x_2} + a_3(x_2, x_3)\frac{\partial}{\partial x_3}$ et $Y = x_1 Z$ o $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ est défini par la 1-

forme holomorphe:

$$\omega = a_3(x_2,x_3)dx_2 - a_2(x_2,x_3)dx_3$$

montre qu'il est exclu d'espérer une classification générale puisqu'une telle classification impliquerait celle des germes de feuilletages à l'origine de $\mathbb{C}^2$.

En dimension 2 nous présentons la classification des algèbres de Heisenberg $\mathcal{L} \subset \mathcal{X}_2$ telles que $r_0(\mathcal{L}_0) = 1$ et $[\mathcal{L},\mathcal{L}](0) = \mathbb{C}.Z(0) = \{0\}$. Lorsque $\mathcal{L}(0) = \{0\}$ la classification semble redoutable. Nous montrons que la partie linéaire de $\mathcal{L}$ est soit nulle soit engendrée par un champ nilpotent, typiquement $x_1\frac{\partial}{\partial x_2}$. Les $\mathcal{L}_n$ donnés par $X = x_1\frac{\partial}{\partial x_2} + h_n(x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2})$, $Y = x_2x_1^{n-1}(x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2})$ et $Z = x_1^n(x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2})$, où les h_n sont des polynômes homogènes de degré n, font partie de cette classe.

Il y a plusieurs études importantes concernant les sous algèbres de Lie $\mathcal{L}$ de dimension finie de $\mathcal{X}_n$ purement singulière (au sens où $r_0(\mathcal{L}_0) = 0$). Citons en particulier les résultats de R. Hermann [6] et Guillemin-Sternberg [5] qui affirment que si $\mathcal{L} \subset \mathcal{X}_n$, $r_0(\mathcal{L}_0) = 0$, est semi-simple alors $\mathcal{L}$ est linéarisable; c'est à dire conjuguée l'algèbre de Lie $\mathcal{L}_1$ constituée des parties linéaires des éléments de $\mathcal{L}$.

Dans cet article nous montrons des propriétés qui vont l'opposé de ces résultats de linéarisation; ainsi le simple fait qu'il n'existe pas de représentation fidèle de $\mathcal{H}$ dans $gl(2;\mathbb{C})$ alors qu'il en existe dans $\mathcal{X}_2$ (satisfaisant $r_0(\mathcal{L}_0) = 0$) laisse présager cela.

1. Généralités

La proposition, élémentaire qui suit, indique qu'il n'y a pas de représentations fidèles de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{X}_1$.

Proposition 1.1. *Soit $\mathcal{L}$ une représentation fidèle de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{X}_n$. Alors $n \geq 2$ et $r(\mathcal{L}) \geq 2$.*

Preuve. Soient $X = f(z)\frac{\partial}{\partial z}$, $Y = g(z)\frac{\partial}{\partial z}$ et $Z = h(z)\frac{\partial}{\partial z}$ trois éléments de $\mathcal{X}_1$, Z non identiquement nuls. Si $[X,Z] = [Y,Z] = 0$, alors $X = \lambda.Z$, $Y = \mu.Z$, λ, $\mu \in \mathbb{C}$, ce qui établit le premier point. Maintenant si $r(\mathcal{L}) = 1$ il existe $T \in \mathcal{X}_n$ et $f,g,h \in \mathcal{O}_n$ tels que:

$$X = fT, Y = gT, Z = hT.$$

Les conditions de commutation $[X,Z] = [Y,Z] = 0$ s'écrivent:

$$0 = fT.h - hT.f = gT.h - hT.g$$

qui indiquent que les fonctions méromorphes non constantes $\frac{f}{h}$ et $\frac{g}{h}$ sont intégrales premières de T. Par suite le quotient $\frac{f}{g}$ est aussi une intégrale première de T. Ce qui conduit à la commutation de X et Y: $[X,Y] = 0$; en contradiction avec $[X,Y] = Z$ et Z non nul. ∎

Pour la représentation linéaire standard de $\mathcal{H}$ on a $r(\mathcal{L}) = 2$, mais il existe des représentations fidèles $\mathcal{L}$ de $\mathcal{H}$ pour lesquelles $r(\mathcal{L}) = 3$. Par exemple les champs de vecteurs:

$$Z = \frac{\partial}{\partial x_1}, X = \frac{\partial}{\partial x_2}, Y = x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + \sum_{i\geq 2} Y_i(x_3,...,x_n)\frac{\partial}{\partial x_i}$$

induisent de telles représentations lorsque l'un des Y_i est non identiquement nul.

La proposition qui suit est élémentaire.

Proposition 1.2. *Si $r_0(\mathcal{L}_0) = 3$ alors $\mathcal{L}$ est conjuguée (par un élément de $Diff_n$) à l'algèbre engendrée par les champs de vecteurs $Z = \frac{\partial}{\partial x_1}$, $X = \frac{\partial}{\partial x_2}$ et $Y = x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3}$.*

Remarque 1.3. Soient $\mathcal{L} = \langle X, Y, Z\rangle \subset \mathcal{X}_n$ une sous algbre de Heisenberg et X' un élément de $\mathcal{X}_p$; alors l'algèbre $\mathcal{L}' = \langle X + X', Y, Z\rangle \subset \mathcal{X}_{n+p}$ est encore une algèbre isomorphe à $\mathcal{H}$.

Considérons $\mathcal{L} = \langle X, Y, Z\rangle \subset \mathcal{X}_3$ isomorphe à $\mathcal{H}$. On peut associer à $\mathcal{L}$ un pinceau de feuilletages holomorphes $\mathcal{F}_t$, $t \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$. Le feuilletage $\mathcal{F}_t$ est par définition le feuilletage tangent l'algèbre commutative engendrée par les champs Z et $X_t = X + tY$ (pour $t = \infty$ $X_t = Y$). Soit Ω une forme volume et $\omega_t = i_{X_t}i_Z\Omega$; alors le feuilletage $\mathcal{F}_t$ est défini par la forme intégrable ω_t. Soit $f = i_Xi_Yi_Z\Omega$, si $r_0(\mathcal{L}_0) < 3$ alors $f(0) = 0$ et l'hypersurface $f = 0$ est invariante par les flots des champs X, Y, Z: ces champs sont en effet tangents à $f = 0$.

Proposition 1.4. *Sous les hypothèses précédentes chaque feuilletage $\mathcal{F}_t$ est Liouville intégrable; plus précisement les formes méromorphes $\frac{\omega_t}{f}$ sont fermées.*

Remarque 1.5. Rappelons que, d'après Cerveau-Mattei [3], si α est un germe de 1-forme méromorphe fermée en $0 \in \mathbb{C}^n$ à pôles le long de $f = 0$ alors α s'écrit:

$$\alpha = \Sigma\lambda_i\frac{df_i}{f_i} + d(\frac{H}{f_1^{n_1}...f_p^{n_p}})$$

où les f_i sont les composantes irréductibles de f, $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $n_i \in \mathbb{N}$ et $H \in \mathcal{O}_n$. Un tel α possède l'intégrale premire multivaluée $\Sigma\lambda_i log f_i + \frac{H}{f_1^{n_1}...f_p^{n_p}}$.

Preuve. Il s'agit de celle de la Proposition 1.4. Dans ce qui suit on choisit des représentants des objets germifiés sur un ouvert ad-hoc, tout en gardant les mêmes notations. Soit m un point générique o $X(m), Y(m), Z(m)$ sont linéairement indépendants. A conjugaison locale près en m:

$$\Omega = hdx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3, h \in \mathcal{O}_3^\star, Z = \frac{\partial}{\partial x_1}, X = \frac{\partial}{\partial x_2}, Y = x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Par suite $\omega_t = i_{X_t}i_Z\Omega = -h(x_1, x_2, x_3)dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ et $f = i_Xi_Yi_Z\Omega = h$. Finalement $\frac{\omega_t}{f} = -dx_3$ qui implique que $\frac{\omega_t}{f}$ est fermée. ∎

Exemple 1.6. On considère l'algèbre $\mathcal{L} \subset \mathcal{X}_3$ engendrée par les champs de vecteurs:

$$X = x_1\frac{\partial}{\partial x_2} + \lambda x_3\frac{\partial}{\partial x_3}, Y = x_2(x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2}) + \mu x_3\frac{\partial}{\partial x_3} Z = x_1(x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2})$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. On vérifie que $\mathcal{L}$ est isomorphe à l'algèbre de Heisenberg et que $r(\mathcal{L}) = 3$ pour λ et μ non nuls (en fait pour $\lambda = \mu = 0$, $\mathcal{L}$ apparaît comme une sous algèbre de $\mathcal{X}_2$). On vérifie aussi que:

$$\omega_t = i_{X+tY} i_Z(dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3) = (\lambda + t\mu)(x_1 x_3 dx_2 - x_2 x_3 dx_1) - x_1^2 dx_3$$

et ici $f = x_1^2 x_3$. On a ainsi:

$$\frac{\omega_t}{f} = (\lambda + t\mu) d(\frac{x_2}{x_1}) - \frac{dx_3}{x_3}.$$

Par suite ω_t possède l'intégrale première multivaluée $(\lambda + t\mu)\frac{x_2}{x_3} - log x_3$. On note que chaque champ X, Y, Z possède une intégrale première méromorphe non constante; mais il n'y a pas, pour λ, μ générique d'intégrale première méromorphe commune.

Introduisons un autre invariant de conjugaison qui est l'entier $s_0(\mathcal{L}) = dim \mathbb{C}.Z(0)$; $s_0(\mathcal{L})$ vaut donc 0 si Z s'annule en 0 et 1 si $Z(0) \neq 0$. Si $r_0(\mathcal{L}) = 2$ et $s_0(\mathcal{L}) = 1$, à conjugaison près, $\mathcal{L}$ est engendrée par $Z = \frac{\partial}{\partial x_1}, X = \frac{\partial}{\partial x_2}, Y = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \sum_{i \geq 2} Y_i(x_3, ..., x_n) \frac{\partial}{\partial x_i}$ comme précédemment. Cette remarque conduit à la:

Proposition 1.7. *En dimension 2 si $r_0(\mathcal{L}_0) = 2$ et $s_0(\mathcal{L}_0) = 1$, alors $\mathcal{L}$ est conjuguée à l'algèbre engendrée par $Z = \frac{\partial}{\partial x_1}, X = \frac{\partial}{\partial x_2}, Y = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}$.*

En dimension 3 on a l'énoncé suivant dont nous laissons la démonstration au lecteur:

Proposition 1.8. *Soit $\mathcal{L} \subset \mathcal{X}_3$ une sous algèbre isomorphe à $\mathcal{H}$; on suppose que $r_0(\mathcal{L}_0) = 2$ et $s_0(\mathcal{L}_0) = 1$. Alors $\mathcal{L}$ est conjuguée l'une des algèbres:*
1. $Z = \frac{\partial}{\partial x_1}, X = \frac{\partial}{\partial x_2}, Y = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_3^k \frac{\partial}{\partial x_2}$, $k \in \mathbb{N}^*$ *si* $r(\mathcal{L}) = 2$
2. $Z = \frac{\partial}{\partial x_1}, X = \frac{\partial}{\partial x_2}, Y = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + (a(x_3)) \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{x_3^{k+1}}{1 + \lambda x_3^k} \frac{\partial}{\partial x_3}$, $\lambda \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{N}$, $a \in \mathcal{O}_1$, $a(0) = 0$ *lorsque* $r(\mathcal{L}) = 3$.

Nous allons examiner en détail le cas $r(\mathcal{L}) = 2$ avec des contraintes reposant sur $r_0(\mathcal{L}_0)$ et $s_0(\mathcal{L}_0)$. En dimension supérieure ou égale 3, $\mathcal{L}$ induit sous l'hypothèse $r(\mathcal{L}) = 2$ un feuilletage de codimension $n-2$ (feuilles de dimension 2) éventuellement singulier. Comme $r(\mathcal{L}) = 2$ l'un des champs X ou Y est non colinéaire Z: dans toute la suite nous supposerons que $r(Vect(X, Z)) = 2$. Sous cette hypothèse il existe des fonctions méromorphes α et β telles que:

$$Y = \alpha X + \beta Z.$$

Les conditions de commutation impliquent les suivantes:

$$Z.\alpha = Z.\beta = X.\alpha = 0, X.\beta = 1.$$

En particulier $\alpha \in \mathcal{M}_n$ est une intégrale première des champs de vecteurs X et Z, et donc du feuilletage $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ associé à $\mathcal{L}$; noter que α peut être constant. En dimension 2, comme X et Z sont non colinéaires α est donc une constante et quitte à changer Y en $Y - \alpha X$ on peut supposer que $\mathcal{L} = \langle X, Y = \beta Z, Z \rangle$, où β est une intégrale première méromorphe non constante de Z.

Exemple 1.9. On donne ici des exemples en dimension 3 qui satisfont $r(\mathcal{L}) = 2$, $r_0(\mathcal{L}) = s_0(\mathcal{L}) = 0$; il s'agit des algèbres $\mathcal{L}$ engendrées par:
$X = x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$,
$Y = x_2 x_1^{k-1}(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3})$,
$Z = x_1^k(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3})$,
où k est un entier strictement positif. On remarque que $\alpha = 0$, $\beta = \frac{x_1}{x_2}$ et $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ est le feuilletage associé à la 1-forme intégrable $x_1 dx_3 - x_3 dx_1$. On note que $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ ne dépend pas de l'entier k.

La classification des algèbres de Heisenberg $\mathcal{L} \subset \mathcal{X}_3$ satisfaisant $r(\mathcal{L}) = 2$, $r_0(\mathcal{L}) = s_0(\mathcal{L}) = 0$ semble délicate. On peut toutefois mentionner les points suivants; lorsque $r(\mathcal{L}) = 2$ on a, avec les notations précédentes, $Z\alpha = X\alpha = 0$, $Z\beta = 0$ et $X\beta = 1$.

Si α est non constante alors le feuilletage $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ de $\mathbb{C}^3_{,0}$ engendré par $\mathcal{L}$ a une intégrale première méromorphe non constante.

Si α est constante, quitte à changer de base, on peut supposer que $\alpha = 0$ et $Y = \beta.Z$. Si β est holomorphe (c'est le cas par exemple si $SingZ$, l'ensemble singulier de Z, est de codimension ≥ 2) alors nécessairement $X(0) \neq 0$. Pour un bon choix de coordonnées on aura $X = \frac{\partial}{\partial x_1}$, $\beta = x_1 + \varepsilon(x_2, x_3)$ avec ε holomorphe. Par un nouveau choix de coordonnées on supposera ε constant et quitte à changer de base que $\varepsilon = 0$. On se ramène donc dans ce cas à:
$X = X = \frac{\partial}{\partial x_1}$, $Z = a_1(x_2, x_3)\frac{\partial}{\partial x_1} + a_2(x_2, x_3)\frac{\partial}{\partial x_2} + a_3(x_2, x_3)\frac{\partial}{\partial x_3}$, $a_i \in \mathcal{O}_2$ et $Y = x_1 Z$.

Le feuilletage $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ est ici donné par la forme intégrable $\omega = a_3(x_2, x_3)dx_2 - a_2(x_2, x_3)dx_3$, qui hérite donc de toute la complexificité des feuilletages de $\mathbb{C}^2_{,0}$. Si $\beta = \frac{1}{\gamma}$ avec $\gamma \in \mathcal{O}_3$, $\gamma(0) = 0$, alors γ est intégrale première de Z et la condition $X.\beta = 1$ se traduit par $X.\gamma = \gamma^2$. Dans ce cas le feuilletage $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ possède la surface invariante $\gamma = 0$. Enfin si $\beta = \frac{f}{g}$ est méromorphe pure, alors $g(X.f) - f(X.g) = g^2$, de sorte qu'ici encore l'hypersurface $g = 0$ est invariante par $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$.**Ceci permet d'obtenir des représentations de $\mathcal{H}$ dans les champs de vecteurs de surfaces éventuellement singulières.**

2. Dimension 2, $r_0(\mathcal{L}) \neq 0$

Nous allons mener une étude au cas par cas en dimension 2. Ici donc $r(\mathcal{L}) = 2$. Nous examinerons les valeurs possibles pour le couple (r_0, s_o) et dans la mesure du possible donnerons des modèles à conjugaison près. Nous avons vu le cas $(r_0, s_o) = (2, 1)$ lors de la Proposition 1.7. Les deux lemmes qui suivent éliminent certaines valeurs du couple (r_0, s_o).

Lemme 2.1. *La situation $(r_0, s_o) = (2, 0)$ n'est pas possible.*

Preuve. Si $(r_0, s_o) = (2, 0)$ alors $Z(0) = 0$ et $dimVect(X(0), Y(0)) = 2$. Pour un bon choix de coordonnées (x_1, x_2) on peut supposer que $X = \frac{\partial}{\partial x_2}$ et, du fait de la commutation $[X, Z] = 0$, $Z = A(x_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + B(x_1)\frac{\partial}{\partial x_2}$, $A(0) = B(0) = 0$, $A, B \in \mathcal{O}_1$.

La condition $[X,Y]=Z$ implique que:

$$Y=(A(x_1)x_2+\alpha(x_1))\frac{\partial}{\partial x_1}+(B(x_1)x_2+\beta(x_1))\frac{\partial}{\partial x_2}$$

avec $\alpha,\beta\in\mathcal{O}_1$, $\alpha(0)\neq 0$. Il reste à exprimer la commutation $[Y,Z]=0$. Un calcul élémentaire montre que:

$$\alpha A^{'}-A\alpha^{'}=AB \tag{1}$$

$$\alpha B^{'}-A\beta^{'}=B^2 \tag{2}$$

Puisque $\alpha(0)\neq 0$, $A(0)=B(0)=0$, la condition (1) implique que $A=0$; ensuite $\alpha B^{'}=B^2$, pour la même raison ($B(0)=0$) implique que $B=0$. Ce qui conduit à $Z\equiv 0$ et est donc absurde. ■

Lemme 2.2. *La situation $(r_0,s_o)=(1,1)$ n'arrive pas.*

Preuve. Si $(r_0,s_o)=(1,1)$, on peut supposer quitte à changer de base que $Z=\frac{\partial}{\partial x_2}$, $X=a(x_1)\frac{\partial}{\partial x_1}+b(x_1)\frac{\partial}{\partial x_2}$ et $Y=B(x_1)\frac{\partial}{\partial x_2}$ avec $a(0)=b(0)=B(0)=0$. La condition $[X,Y]=Z$ se traduit alors par $aB^{'}=1$. Ce qui contredit le fait que $a(0)=0$. ■

Par contre $(r_0,s_o)=(1,0)$ est possible; la classification nécessite celle des couples ($X=\frac{\partial}{\partial x_1}$, $Z=a(x_2)\frac{\partial}{\partial x_1}+b(x_2)\frac{\partial}{\partial x_2}$) à conjugaison près. Faisons tout d'abord un rappel; soit $T=f(z)\frac{\partial}{\partial z}$ un élément de $\mathcal{X}_1$; alors (cf [7], [3]) T est conjugué à l'un des champs:

$$\frac{\partial}{\partial z},\lambda z\frac{\partial}{\partial z},\lambda\in\mathbb{C}^*,\frac{z^{p+1}}{1+\mu z^p}\frac{\partial}{\partial z},\mu\in\mathbb{C},p\in\mathbb{N}.$$

On désigne par $\nu(f)$ la multiplicité algébrique de l'élément $f\in\mathcal{O}_n$.

Proposition 2.3. *Soient $X=\frac{\partial}{\partial x_1}$ et $Z=a(x_2)\frac{\partial}{\partial x_1}+b(x_2)\frac{\partial}{\partial x_2}$; alors si $\nu(a)\geq\nu(b)$ le couple (X,Z) est conjugué à l'un des couples:*

$$(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2}),(\frac{\partial}{\partial x_1},\lambda x_2\frac{\partial}{\partial x_2}),(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{x_2^{p+1}}{1+\mu x_2^p}\frac{\partial}{\partial x_2}).$$

Preuve. Les difféomorphismes qui préservent $\frac{\partial}{\partial x_1}$ et fixent l'origine sont de la forme $(x_1,x_2)\mapsto(x_1+\varepsilon(x_2),\delta(x_2))$ où $\varepsilon\in\mathcal{O}_1$, $\varepsilon(0)=0$, et $\delta\in Diff_1$. Si $\nu(a)\geq\nu(b)$ l'équation différentielle:

$$z^{'}=-\frac{a(x_2)}{b(x_2)} \tag{3}$$

a ses solutions holomorphes. Soit ε, $\varepsilon(0)=0$, solution de (3). Alors le difféomorphisme $(x_1+\varepsilon(x_2),x_2)$ conjugue (X,Z) à $(\frac{\partial}{\partial x_1},b(x_2)\frac{\partial}{\partial x_2})$. On termine en utilisant le rappel. ■

Proposition 2.4. *Soient* $X = \frac{\partial}{\partial x_1}$ *et* $Z = a(x_2)\frac{\partial}{\partial x_1} + b(x_2)\frac{\partial}{\partial x_2}$ *; alors si* $1 \leq \nu(a) < \nu(b)$ *le couple* X, Z *est conjugué à l'un des couples:*

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, P(x_2)\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{x_2^{p+1}}{1+\mu x_2^p}\frac{\partial}{\partial x_2}, p \in \mathbb{N}, \mu \in \mathbb{C},$$

où P *est un polynôme de degré inférieur à* $p+1$ *et d'ordre* $\nu(P) = \nu(a)$.

Preuve. Comme $\nu(b) = p+1$ est plus grand que 2, $b(x_2)\frac{\partial}{\partial x_2}$ est conjugué à l'un des $\frac{x_2^{p+1}}{1+\mu x_2^p}\frac{\partial}{\partial x_2}$. Si maintenant $Z = a(x_2)\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{x_2^{p+1}}{1+\mu x_2^p}\frac{\partial}{\partial x_2}$, $1 \leq \nu(a) < p+1$ et si $\phi \in Diff_2$ est du type $\phi(x_1, x_2) = (x_1 + \varepsilon(x_2), x_2)$, $\varepsilon \in \mathcal{O}_1$, $\varepsilon(0) = 0$, alors $\phi_* Z$ s'exprime comme suit:

$$\phi_* Z = (a(x_2) + \varepsilon^{'}(x_2)\frac{x_2^{p+1}}{1+\mu x_2^p})\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{x_2^{p+1}}{1+\mu x_2^p}\frac{\partial}{\partial x_2}.$$

On pose $a(x_2) = P(x_2) + x_2^{p+1}h(x_2)$ où P est un polynôme de degré p et $h \in \mathcal{O}_1$. Si ε est solution de $\varepsilon^{'}(x_2) + (1+\mu x_2^p)h(x_2) = 0$, alors ϕ transforme Z comme souhaié. ∎

Nous pouvons énoncer la:

Proposition 2.5. *Soit* $\mathcal{L} \subset \mathcal{X}_2$ *une sous algèbre de Lie de Heisenberg satisfaisant* $(r_0, s_o) = (1, 0)$. *Alors* $\mathcal{L}$ *est conjuguée à l'une des algèbres:*

1. $\langle X = \frac{\partial}{\partial x_1}, Y = \frac{x_1 x_2^{p+1}}{1+\mu x_2^p}\frac{\partial}{\partial x_2}, Z = \frac{x_2^{p+1}}{1+\mu x_2^p}\frac{\partial}{\partial x_2}\rangle$, $p \geq 0, \mu \in \mathbb{C}$.
2. $\langle X = \frac{\partial}{\partial x_1}, Y = (x_1 + \delta(x_2))\{P(x_2)\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{x_2^{p+1}}{1+\mu x_2^p}\frac{\partial}{\partial x_2}\}, Z = P(x_2)\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{x_2^{p+1}}{1+\mu x_2^p}\frac{\partial}{\partial x_2}\rangle$

avec $p \geq 1, \mu \in \mathbb{C}$, P *est un polynôme de degré* $\leq p-1$, $P(0) = 0$ *et* $\delta \in \mathcal{M}_1$ *satisfaisant l'équation différentielle:*

$$P(x_2) + \delta^{'}(x_2)\frac{x_2^{p+1}}{1+\mu x_2^p} = 0. \tag{4}$$

On demande en outre que $\delta(x_2)P(x_2)$ *soit holomorphe, ie que l'ordre du pôle de* δ *soit inféerieur ou égal à* $\nu(P)$.

Preuve. La Proposition 1.8 permet de conjuguer X et Z aux modèles annoncés. En utilisant successivement les conditions $[X, Y] = Z$ et $[Y, Z] = 0$ on trouve les modèles de Y. ∎

Remarque 2.6. On note la différence d'estimation des degrés entre cette proposition et la précédente. Ici $d^\circ P \leq p-1$ est imposé par le fait que l'intégration de (4) oblige la nullité du résidu en 0 de $\frac{P}{x_2^{p+1}}(1+\mu x_2^p)$ et donc le fait que P n'ait pas de terme en x_2^p.

3. Dimension 2 , $r_0 = 0$

C'est bien sûr le cas difficile. Comme précédemment on choisit des générateurs X, Y et Z vérifiant $[X,Z] = [Y,Z] = 0, [X,Y] = Z$ avec $Y = \beta Z$, β intégrale première méromorphe non constante de Z. Voici deux exemples intéressants:

Exemple 3.1. On se donne les champs X, Y et Z définis par:

$$X = -x_1x_2(2x_1\frac{\partial}{\partial x_1} - x_2\frac{\partial}{\partial x_2}), Y = x_2(x_1\frac{\partial}{\partial x_1} - x_2\frac{\partial}{\partial x_2}), Z = x_1x_2^2(x_1\frac{\partial}{\partial x_1} - x_2\frac{\partial}{\partial x_2}).$$

Ici on a $\beta = \frac{1}{x_1x_2}$ et l'on remarque que tous les éléments de $\mathcal{L}$ s'annulent sur la droite $x_2 = 0$: aucun élément de $\mathcal{L}$ n'est à singularité isolée.

Exemple 3.2. Ici $X = x_1\frac{\partial}{\partial x_2}$, $Y = x_2x_1^{n-1}(x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2})$ et $Z = x_1^n(x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2})$. Dans ce cas $\beta = \frac{x_2}{x_1}$, tous les champs s'annulent sur $x_1 = 0$ sauf dans le cas spécial $n = 1$:

$$X = x_1\frac{\partial}{\partial x_2}, Y = x_2(x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2}), Z = x_1(x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2})$$

cas où l'élément générique de $\mathcal{L}$ est à singularité isolée.

Ces exemples sont reliés à ceux présentés en 1.9 précedemment. On constate dans l'Exemple 3.2 qu'il est possible que les 1-jets des éléments de $\mathcal{L}$ soient non triviaux. Nous allons donc essayer de classifier les algèbres de Heisenberg $\mathcal{L} \subset \mathcal{X}_2$ telles que $r_0 = 0$ et telles que l'algèbre $\mathcal{L}_1 = J^1\mathcal{L}$ des 1-jets des éléments de $\mathcal{L}$ soit non triviale.

Soient X_1, Y_1, Z_1 les 1-jets de Y, Y, Z respectivement , $Y = \beta.Z$. On a les relations $[X_1, Z_1] = [Y_1, Z_1] = 0$ et $[X_1, Y_1] = Z_1$.

Lemme 3.3. $Z_1 = 0$.

Preuve. La condition $[X_1, Y_1] = Z_1$ implique que Z_1 est de trace nulle; par suite Z_1 est soit nilpotent soit a ses valeurs propres distinctes opposées. Dans ce dernier cas on peut supposer que Z_1 est diagonal ($Z_1 = \lambda_1x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \lambda_2x_2\frac{\partial}{\partial x_2}, \lambda_1 + \lambda_2 = 0$); si $Z_1 \neq 0$ la commutation implique que X_1 et Y_1 sont aussi diagonaux et donc commutent. Donc ce cas n'arrive pas. Si Z_1 est nilpotent non trivial, disons $Z_1 = x_1\frac{\partial}{\partial x_2}$, alors l'algèbre des champs linéaires qui commutent à Z_1 est $\langle x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2}, x_1\frac{\partial}{\partial x_2}\rangle$ qui est une algèbre commutative. En contradiction avec $[X_1, Y_1] = Z_1 \neq 0$. ■

Par suite l'algèbre $\mathcal{L}_1$ est abélienne de dimension inférieure ou égale à 2. Supposons $dim_{\mathbb{C}}\mathcal{L}_1 = 2$; alors à conjugaison linéaire près $\mathcal{L}_1$ est l'une des deux algèbres:

1. $\mathcal{L}_1' := \langle \lambda_1x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \lambda_2x_2\frac{\partial}{\partial x_2}, \lambda_i \in \mathbb{C}\rangle$ l'algèbre diagonale.

2. $\mathcal{L}_1" := \langle x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2}, x_1\frac{\partial}{\partial x_2}\rangle$.

Supposons que $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_1^{'}$; soit $X \in \mathcal{L}$ tel que le 1-jet de X soit $J^1X = X_1 = x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \lambda x_2\frac{\partial}{\partial x_2}$ avec λ irrationnel positif. Alors X est linéarisable (Théorème de linéarisation de Poincaré) et l'on peut donc supposer que $X = X_1$. Mais les champs holomorphes qui commutent à X sont exactement les champs linéaires diagonaux. Le champ Z a son 1-jet nul (Lemme 3.3) et commute à X, il est donc identiquement nul. Ce qui est absurde. Lorsque $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_1^{''}$, on fait le même raisonnement en choisissant X tel que $J^1X = x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2}$. Le champ X satisfait encore les conditions de linéarisation de Poincaré et ne commute qu'à des champs linéaires. Nous venons d'établir le:

Lemme 3.4. *Si $(r_0, s_o) = (0,0)$, alors $\mathcal{L}_1 = J^1\mathcal{L}$ est de dimension 0 ou 1: $dim_{\mathbb{C}}J^1\mathcal{L} \leq 1$.*

Remarquons que l'argument précédent montre que si $dim_{\mathbb{C}}J^1\mathcal{L} = 1$ et $X \in \mathcal{L}$ est tel que $X_1 = J^1X$ soit non nul, alors X_1 ne peut satisfaire aux conditions de linéarisation de Poincaré (en fait aux conditions de linéarisation formelle). On obtient dans un premier temps le lemme suivant qui sera en fait précisé dans la Proposition 3.6:

Lemme 3.5. *Si $(r_0, s_o) = (0,0)$ et $dim_{\mathbb{C}}J^1\mathcal{L} = 1$, alors $\mathcal{L}_1$ est engendré, à conjugaison linéaire près, par un champ X_1 de l'un des types suivants:*

1. *$X_1 = qx_1\frac{\partial}{\partial x_1} - px_2\frac{\partial}{\partial x_2}$, p et q sont des entiers strictement positifs (cas résonnant).*
2. *$X_1 = x_1\frac{\partial}{\partial x_1}$ (cas noeud-col).*
3. *$X_1 = x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + mx_2\frac{\partial}{\partial x_2}$, m entier, $m \geq 2$ (Cas Poincaré-Dulac).*
4. *$X_1 = x_1\frac{\partial}{\partial x_2}$ (cas nilpotent).*

Dans la suite on supposera que les champs X, Y et Z vérifient $[X,Y] = Z, [X,Z] = [Y,Z] = 0$, $Y = \beta Z$ avec $X_1 = Y_1 = 0$ et X_1 est donné par le Lemme 3.5. Nous allons démontrer la:

Proposition 3.6. *$\mathcal{L}_1$ est engendré par un champ nilpotent; ie à conjugaison linéaire près $X_1 = x_1\frac{\partial}{\partial x_2}$.*

Preuve. Nous allons éliminer les cas 1 , 2 et 3 du Lemme 3.5. Commençons par le cas 3 qui est le plus direct. Si $J^1X = x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + mx_2\frac{\partial}{\partial x_2}$ le théorème de Poincaré-Dulac dit que X est conjugué à $X_\varepsilon = x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + mx_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \varepsilon x_1^m\frac{\partial}{\partial x_2}$ avec $\varepsilon \in \{0,1\}$. On peut donc supposer que $X = X_\varepsilon$. On remarque que l'espace $C(X)$ des champs holomorphes qui commutent à X se réduit à:

$$C(X) = \langle x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + mx_2\frac{\partial}{\partial x_2}, x_1^m\frac{\partial}{\partial x_2}\rangle.$$

Par suite le champ Z ayant son 1-jet nul est $Z = x_1^m\frac{\partial}{\partial x_2}$ (à constante multiplicative près) et $Y = \beta Z = f\frac{\partial}{\partial x_2}$, où f est holomorphe. La commutation $[Y,Z] = 0$ implique

que $\frac{\partial f}{\partial x_2}=0$, ie $f=f(x_1)$; reste à exploiter la condition $[X,Y]=Z$ qui conduit à l'équation différentielle:

$$x_1 f^{'}(x_1)-mf(x_1)=x_1^m.$$

Par suite $f(x_1)=\mu x_1^m, \mu\in\mathbb{C}$ et $Y\in\langle Z\rangle$. Ce qui est absurde.

Examinons le cas 2. où $X_1=x_1\frac{\partial}{\partial x_1}$. On sait dans ce cas que X est formellement conjugué à un champ de type $x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+b(x_2)\frac{\partial}{\partial x_2}$ avec b soit identiquement nul, soit de type $\frac{x_2^{p+1}}{1+\mu x_2^p}\frac{\partial}{\partial x_2}$, $p\geq 1$ et $\mu\in\mathbb{C}$.

Si $X=x_1\frac{\partial}{\partial x_1}$ l'ensemble $\hat{C}(X)$ des champs commutant à X est:

$$\hat{C}(X)=\{\mu x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+B(x_2)\frac{\partial}{\partial x_2}, B\in\hat{\mathcal{O}}_1, \mu\in\mathbb{C}\}.$$

Comme Z (en fait il s'agit du champ formel transformé de Z par le difféomorphisme formel normalisant X) commute à X et a son 1-jet nul on a:

$$Z=B(x_2)\frac{\partial}{\partial x_2}, \nu(B)\geq 2, B\in\hat{\mathcal{O}}_1.$$

Maintenant la commutation $[Y,Z]=0$ et $Y=\beta\frac{\partial}{\partial x_2}$ conduit à $Y=f(x_2)B(x_2)\frac{\partial}{\partial x_2}$, $f\in\hat{\mathcal{M}}_1$. On termine par $[X,Y]=Z$ qui donne $x_2 f^{'}(x_2)=1$. Ce qui est absurde.

Si $X=x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+B(x_2)\frac{\partial}{\partial x_2}, B\neq 0, \nu(B)\geq 2$ (toujours à conjugaison formelle près), alors $\hat{C}(X)$ est de dimension 2:

$$\hat{C}(X)=\langle x_1\frac{\partial}{\partial x_1}, B(x_2)\frac{\partial}{\partial x_2}\rangle.$$

Par suite $Z=B(x_2)\frac{\partial}{\partial x_2}$ (à constante multiplcative près), puis $Y=f(x_2)B(x_2)\frac{\partial}{\partial x_2}$, $f\in\hat{\mathcal{M}}_1$. La condition $[X,Y]=Z$ s'écrit encore $x_2 f^{'}(x_2)=1$; ce qui est absurde. On note que dans ces deux cas, bien que les $\hat{C}(X)$ ne soient pas de même nature, la démarche est essentiellement la même.

Nous terminons par l'étude du cas résonnant. Dans ce cas le champ X est formellement conjugué à un champ du type (noté encore X):

$$X=qx_1\frac{\partial}{\partial x_1}-px_2\frac{\partial}{\partial x_2}+x_1a(x_1^p x_2^q)\frac{\partial}{\partial x_1}+x_2b(x_1^p x_2^q)\frac{\partial}{\partial x_2}$$

avec $a,b\in\hat{\mathcal{O}}_1$, $a(0)=b(0)=0$. L'écriture précédente est une décomposition de Jordan: $X=S+N$ avec $S=qx_1\frac{\partial}{\partial x_1}-px_2\frac{\partial}{\partial x_2}$ semi-simple et $N=X-S$ nilpotent, $[S,N]=0$. En particulier un champ de vecteurs (formel) Z commutant à X commute avec S et N. Par suite on peut écrire:

$$Z=x_1A(x_1^p x_2^q)\frac{\partial}{\partial x_1}+x_2B(x_1^p x_2^q)\frac{\partial}{\partial x_2}, A,B\in\hat{\mathcal{O}}_1.$$

Supposons que $r(\langle S,N\rangle)=2$, ie S et N ne sont pas colinéaires. On écrit $Z=\varepsilon S+\delta N$ o ε et δ sont dans $\hat{\mathcal{M}}_2$. Comme $[S,Z]=[N,Z]=0$ on a:

$$S.\varepsilon=N.\varepsilon=S.\delta=N.\delta=0$$

et donc ε et δ sont des constantes. En fait puisque $J^1 Z = 0$, la constante ε est nulle, $Z = \delta N$ et on peut supposer que $\delta = 1$.

Le champ Y qui est proportionnel à Z, $Y = \beta Z$ avec $\beta \in \hat{\mathcal{M}}_2$, commute à Z et par suite $N.\beta = 0$. De plus $[X, Y] = X.\beta N = Z = \delta N$; par suite $N.\beta = 0$ et $X.\beta = S.\beta = 1$. Mais il n'existe pas d'élément $\beta \in \hat{\mathcal{M}}_2$ tel que $S.\beta = 1$. En effet une "fonction" β solution de $S.\beta = 1$ s'écrit $\beta = \alpha log x_1 + \beta log x_2 + \hat{a}(x_1^p x_2^q)$, où $(\alpha, \beta) \neq 0$ et $\hat{a} \in \hat{\mathcal{M}}_1$. Le cas S et N non colinéaires n'arrive donc pas; reste le cas S et N colinéaires, ie $X = h(x_1^p x_2^q)(q x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - p x_2 \frac{\partial}{\partial x_2})$, $h \in \hat{\mathcal{O}}_1$. La commutation $[X, Z] = 0$ implique que $Z.h(x_1^p x_2^q) = 0$. Si h n'est pas constante alors $Z.x_1^p x_2^q = 0$ qui implique la colinéarité de X et Z. Ce qui n'arrive pas. Finalement h est constant et $X = q x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - p x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$. On conclut en remarquant que si Y est un champ formel alors lorsque l'on développe $[X, Y]$ en séries on ne rencontre pas de termes en les monômes $x_1 (x_1^p x_2^q)^n \frac{\partial}{\partial x_1}$ et $x_2 (x_1^p x_2^q)^n \frac{\partial}{\partial x_2}$. Par conséquent la condition $[X, Y] = Z \neq 0$ n'est pas possible. ∎

4. Cas nilpotent

Nous faisons l'étude du cas $X_1 = x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$; ce cas est non trivial puisque nous avons vu de tels exemples.

4.1. Cas linéaire C'est le cas à priori simple où X est conjugué à $x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$; on suppose donc que $X = x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$. Le commutateur $C(X)$ de X est:

$$C(X) = \{\tilde{a}(x_1)\frac{\partial}{\partial x_2} + \tilde{b}(x_1)(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}), \tilde{a}, \tilde{b} \in \mathcal{O}_1\}.$$

Donc le champ Z est de ce type; mais compte tenu du fait que $Z_1 = J^1 Z = 0$ on aura

$$Z = a(x_1) x_1^2 \frac{\partial}{\partial x_2} + b(x_1)(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2})$$

avec a et b dans $\mathcal{O}_1$, b non identiquement nul. On peut supposer que a est un polynôme, quitte à conjuguer Z par un difféomorphisme de la forme $(x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2 + \delta(x_1))$. Considérons maintenant $Y = \beta.Z$, $\beta \in \mathcal{M}_2$ qui doit satisfaire $X(\beta) = 1$ et $Z(\beta) = 0$, soit:

$$x_1 \frac{\partial \beta}{\partial x_2} = 1 \text{ et } a(x_1) x_1^2 \frac{\partial \beta}{\partial x_2} + b(x_1)(x_1 \frac{\partial \beta}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial \beta}{\partial x_2}) = 0.$$

Par suite $\beta = \frac{x_2}{x_1} + \varepsilon(x_1)$, avec $\varepsilon \in \mathcal{M}_1$, $x_1^2 a(x_1)\varepsilon(x_1)$ et $x_1 b(x_1)\varepsilon(x_1)$ holomorphes, satisfaisant l'équation différentielle:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_1} = -\frac{a(x_1)}{x_1 b(x_1)}.$$

Ce qui impose que $Res_0(\frac{a}{x_1 b}) = 0$, où $Res_m(*)$ désigne le résidu de $(*)$ en m. On obtient donc la:

Proposition 4.1. *Soit $\mathcal{L} = \langle X, Y, Z \rangle$ avec $[X, Y] = Z$, $[X, Z] = [Y, Z] = 0$. Si $X = x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$, alors $\mathcal{L}$ est conjuguée à une algèbre de Lie de type Heisenberg engendrée*

par:
$X = x_1\frac{\partial}{\partial x_2}$, $Y = (\frac{x_2}{x_1} + \varepsilon(x_1)).\{a(x_1)x_1^2\frac{\partial}{\partial x_2} + x_1 b(x_1)(x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2})\}$ *et*
$Z = a(x_1)x_1^2\frac{\partial}{\partial x_2} + x_1 b(x_1)(x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2})$
avec $\varepsilon \in \mathcal{M}_1$ *solution de l'équation différentielle* $\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_1} = -\frac{a(x_1)}{x_1 b(x_1)}$, *où* a *est un polynôme,* $b \in \mathcal{O}_1, b \not\equiv 0$ *et* $Res_0(\frac{-a}{x_1 b}) = 0$, $x_1^2 a(x_1)\varepsilon(x_1)$ *et* $x_1 b(x_1)\varepsilon(x_1)$ *holomorphes.*

L'Exemple 3.2 correspond à $a = 0$, $\varepsilon = 0$ et $b = x_1^{n-1}$.

4.2. Cas où X s'annule sur une courbe

Remarquons que si $X = Ux_1\frac{\partial}{\partial x_2}$ avec U unité (c'est le cas où la courbe des zéros est une feuille du feuilletage $\mathcal{F}_X$), alors X est conjugué à $x_1\frac{\partial}{\partial x_2}$ et l'on se ramène au cas précédent. En effet si ϕ est un difféomorphisme du type $(x_1, x_2) \mapsto (x_1, wx_2)$, où w est solution de l'équation différentielle $w + x_2\frac{\partial w}{\partial x_2} = \frac{1}{U}$, alors ϕ conjugue X á $x_1\frac{\partial}{\partial x_2}$.

On suppose donc la courbe des zéros de X de type $x_1 = \varepsilon(x_2)$, $\varepsilon \neq 0$, $\varepsilon(0) = \varepsilon'(0) = 0$, ie X est du type:

$$X = U(x_1 - \varepsilon(x_2))\frac{\partial}{\partial x_2}.$$

On peut d'ailleurs par un changement de coordonnées $(x_1, x_2) \mapsto (x_1, l(x_2))$ ad-hoc supposer que $\varepsilon(x_2) = x_2^p, p \geq 2$.

Nous allons montrer qu'il n'y a pas d'algèbre de Heisenberg $\langle X, Y, Z\rangle$ avec $X = U(x_1 - x_2^p)\frac{\partial}{\partial x_2}$. Si tel est le cas le champ Z doit être tangent à la courbe Γ des zéros de X: $\Gamma = \{x_1 = x_2^p\}$. Supposons $Z|\Gamma$ non identiquement nul. Comme le champ Y est colinéaire à Z ($Y = \beta Z, \beta$ méromorphe) le champ $Y|\Gamma$ est tangent à Γ. Les conditions de commutation avec $Z|\Gamma$ font que les trois champs $X|\Gamma, Y|\Gamma$ et $Z|\Gamma$ sont $\mathbb{C}-$ colinéaires, donc on ne peut avoir $[X|\Gamma, Y|\Gamma] = Z|\Gamma$. On en déduit que Z s'annule sur Γ et par suite s'écrit:

$$Z = (x_1 - x_2^p)(A\frac{\partial}{\partial x_1} + B\frac{\partial}{\partial x_2}) = \alpha(x_1, x_2)\frac{\partial}{\partial x_1} + BU(x_1 - x_2^p)\frac{\partial}{\partial x_2}, \alpha, \beta \in \mathcal{O}_2.$$

De nouveau l'égalité $[X, Z] = 0$ implique que $\alpha = \alpha(x_1)$ et donc $\alpha \equiv 0$ (car divisible par $x_1 - x_2^p$). Finalement $Z = B.X$, ce qui n'est pas possible puisque $r = 2$.

4.3. Cas X nilpotent à singularité isolée: faits et exemples

Commençons par les exemples suivants; soit $\mathcal{L}_n = \langle X, Y, Z\rangle$
$X = x_1\frac{\partial}{\partial x_2} + h_n(x_1, x_2)(x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2})$
$Y = x_2 x_1^{n-1}(x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2})$
$Z = x_1^n(x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2})$
où n est un entier, $n \geq 1$, et h_n est un polynôme homogène de degré n non trivial. Il est facile de voir que tous les $\mathcal{L}_n$ sont isomorphes à $\mathcal{H}$. Le choix du champ $X \in \mathcal{L}_n$ n'est bien sûr pas unique puisque chaque $X_{a,b} = X + aY + bZ$, $a, b \in \mathbb{C}$ convient. On a:

$$X_{a,b} = x_1\frac{\partial}{\partial x_2} + (h_n(x_1, x_2) + ax_2x_1^{n-1} + bx_1^n)(x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2})$$

et l'on constate que si $n \geq 2$ et $h_n(0, x_2)$ est non identiquement nul alors tous les $X_{a,b}$ sont à singularité isolée. Ces exemples sont bien différents des précédents. On constate dans ces exemples que les champs Y et Z sont homogènes de même degré. La proposition qui suit montre que les configurations ci-dessus sont les seules ayant cette propriété.

Proposition 4.2. *Soit $\mathcal{L} = \langle X, Y, Z \rangle \subset \mathcal{X}_2$ une sous algèbre de Heisenberg avec les notations habituelles, $r_0(\mathcal{L}_0) = 0$. On suppose que Y et Z sont des champs homogènes de même degré. Alors à conjugaison linéaire près $\mathcal{L} = \mathcal{L}_n$; c'est à dire à changement de base près*
$X = x_1\frac{\partial}{\partial x_2} + h_n(x_1, x_2)(x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2})$
$Y = x_2x_1^{n-1}(x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2})$
$Z = x_1^n(x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2})$
où $n+1$ est le degré commun de Y et Z et h_n est un polynôme homogène de degré n.

Preuve. Remarquons d'abord que β $(Y = \beta Z)$ est rationnelle homogne de degré zéro, non constante. Comme $Z.\beta = 0$, les champs Z et Y sont colinéaires au champ radial:

$$Z = g_n(x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2}), Y = f_n(x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2})$$

où f_n et g_n sont des polynômes homogènes de degré n. Ecrivons $X = X_1 + X'$ avec X_1 linéaire et $J^1X' = 0$. Visiblement on a:

$$[X_1, Y] = Z, [X_1, Z] = 0 \text{ et } [X', Y] = [X', Z] = 0.$$

En particulier X_1 est non identiquement nul. Notons que f_n et g_n sont $\mathbb{C}$-indépendants et vérifient:

$$X_1g_n = 0 \text{ et } X_1f_n = g_n.$$

Comme g_n est non identiquement nulle X_1 est à conjugaison linéaire près de l'un des types:

- $X_1 = qx_1\frac{\partial}{\partial x_1} - px_2\frac{\partial}{\partial x_2}$, p et q sont des entiers positifs sans diviseur commun (cas semi-simple) ou
- $X_1 = x_1\frac{\partial}{\partial x_2}$ (cas nilpotent).

Si X_1 est semi-simple, $x_1^px_2^q$ est une intégrale première minimale (au sens de Mattei-Moussu [8]). De sorte que $g_n = \varepsilon(x_1^px_2^q)^N$, $\varepsilon \in \mathbb{C}^*$, N est un entier ad-hoc. Il est facile de voir que g_n n'est pas dans l'image de la dérivation X_1 et ce cas n'arrive donc pas.

Ainsi X_1 est nilpotent et à conjugaison près $X_1 = x_1\frac{\partial}{\partial x_2}$ et par suite $Z = x_1^n(x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2})$ (à constante multiplicative près). La condition $[X, Y] = Z$ implique que $x_1\frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1^n$ et $f_n = x_2x_1^{n-1} + \delta x_1^n$, $\delta \in \mathbb{C}$. On peut alors par un changement de base évident supposer que $\delta = 0$ (c'est ici qu'intervient un changement de base éventuel).

La nullité des commutateurs $[X', Y]$ et $[Y, Z]$ implique que $\frac{x_2x_1^{n-1}}{x_1^n} = \frac{x_2}{x_1}$ est une intégrale première de X'. Par suite il existe $h \in \mathcal{O}_2$ tel que:

$$X = h(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}) = hR.$$

Mais de nouveau un calcul explicite de $[h.R, x_1^n R] = 0$ indique que $\frac{h}{x_1^n}$ est une intégrale première de R. Par suite h est homogène de degré n et la proposition est démontrée. ■

Références

[1] F. Cano, D. Cerveau, J. Deserti, *Théorie élémentaire des feuilletages holomorphes singuliers*, Collection Echelles, Belin (2013).

[2] D. Cerveau, A. Lins-Neto, *Commuting vector fields*, arXiv 190602109 (2019).

[3] D. Cerveau, J.-F. Mattei, *Formes intégrables holomorphes singulières*, Astérisque 97, Soc. Math. France, (1982).

[4] D. Cerveau, R. Moussu, *Groupes d'automorphismes de* $(\mathbb{C}, 0)$ *et équations différentielles* $ydy + ... = 0$, Bll. Soc. Math. France **116** (1988), 459-488.

[5] V. Guillemin, S. Sternberg: *Remarks on a paper of Hermann*, Trans. Amer. Math. Soc. **130** (1968), 110-116.

[6] R. Hermann: *The formal linearization of a semi-simple Lie algebra of vector field about a singular point*, Trans. Amer. Math. Soc. **130** (1968) , 105-109.

[7] F. Loray, *5 leçons sur la structure transverse d'une singularité de feuilletage holomorphe en dimension 2 complexe*, Monographies Red TMR Europea Sing. Ec. Dif. Fol. **1** (1999) ccsd 0016434, 1-92.

[8] J. F. Mattei, R. Moussu, *Holonomie et intégrales premières*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **13** $N°4$ (1980), 469-523.

D. Cerveau
IRMAR, CNRS UMR 6625
Université de Rennes1
Campus de Beaulieu, Bât. 22-23
F-35042 Rennes Cedex, France
dominique.cerveau@univ-rennes1.fr

D. Garba Belko
Facult des Sciences
Université Abdou Moumouni
B.P. 10662 Niamey, Niger
garbabelkodjibrilla@yahoo.fr