

ORSAY  
Série A  
N° d'ordre 840

# THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY

DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS - SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

ROBERT MOUSSU

---

1<sup>re</sup> THÈSE : SUR LES FEUILLETAGES DE CODIMENSION UN.

2<sup>e</sup> THÈSE : PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTE

---

Soutenues le 21 SEPTEMBRE 1971 devant la Commission d'Examen

MM. H. CARTAN	}	<i>Président</i>
C. GODBILLON		
A. HAEFLIGER	}	<i>Examinateurs</i>
G. JOUBERT		
H. ROSENBERG		

ORSAY  
Série A  
N° d'ordre 840

# THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY

DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

ROBERT MOUSSU

---

1<sup>re</sup> THÈSE : SUR LES FEUILLETAGES DE CODIMENSION UN.

2<sup>e</sup> THÈSE : PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTE

---

Soutenues le 21 SEPTEMBRE 1971 devant la Commission d'Examen

MM. H. CARTAN  
C. GODBILLON  
A. HAEFLIGER  
G. JOUBERT  
H. ROSENBERG

*Président*

*Examinateurs*

Je remercie Monsieur Henri CARTAN d'avoir bien voulu me faire l'honneur de présider ce jury.

Mes remerciements vont ensuite à Messieurs Claude GOBILLON et André HAEFLIGER qui se sont intéressés à mes travaux et qui ont accepté de se joindre aux membres de ce jury.

Monsieur Gérard JOUBERT qui a eu une influence déterminante sur mon orientation a suivi le développement de mon travail avec un intérêt très dynamique. Son aide et ses encouragements m'ont été très précieux. Je lui en exprime ici toute ma reconnaissance.

La plus grande partie de cette thèse est constituée de réponses à des questions que m'avait posées Harold ROSENBERG. Ses conseils, sa volonté de me faire participer à ses recherches ont été prépondérantes pour moi. Je suis heureux de lui en exprimer ici toute ma gratitude.

Certaines parties des chapitres III et IV proviennent de recherches effectuées avec Robert ROUSSARIE. Ses critiques et ses suggestions ont toujours été très fécondes. Je le remercie vivement de sa collaboration si amicale.

Mes remerciements vont également à mes amis Bernard RAYMOND et Bernard PERRON qui par des discussions pleines d'enseignements m'ont beaucoup aidés.

Enfin, je tiens à remercier les personnes qui ont participé à la préparation matérielle de ce travail : Madame CAUMETTE et Mademoiselle LEFORT qui ont assuré la frappe et Monsieur VITU la reliure.

# T A B L E des M A T I E R E S

## INTRODUCTION

### I - GENERALITES SUR LES FEUILLETAGES DE CODIMENSION 1

- 1 - Pseudo-groupe de  $R^+$  réalisation d'un groupe de germes en zéro . . . . . p. 6
- 2 - Holonomie et relèvement suivant les normales . . . . . p. 14
- 3 - Feuilles compactes . . . . . p. 20
- 4 - Transversales fermées . . . . . p. 25
- 5 - Feuilletages transverses au bord . . . . . p. 31

### II - FEUILLETAGES SANS HOLONOMIE

- 1 - Rappels sur les feuilletages sans holonomie . . . . . p. 37
- 2 - Feuilletages sans holonomie des variétés fermées . . . . . p. 44
- 3 - Feuilletages sans holonomie des variétés à bord, transverses au bord. p. 51
- 4 - Construction de feuilletages sans holonomie . . . . . p. 57

### III - FEUILLETAGES PRESQUE SANS HOLONOMIE

- 1 - Sur la non existence d'ensemble minimal exceptionnel . . . . . p. 62
- 2 - Généralités sur les feuilletages presque sans holonomie . . . . . p. 67
- 3 - Sur le théorème de A. Denjoy pour les feuilletages . . . . . p. 72
- 4 - Application aux actions de  $R^{n-1}$  sur  $T^n$  . . . . . p. 84

### IV - APPLICATION AUX VARIETES DE DIMENSION 3

- 1 - Feuilletage de Reeb généralisé . . . . . p. 90
- 2 - Conjugaison des feuilletages de  $T^2 \times I$  et  $T^3$  sans composante de Reeb. p. 101
- 3 - Conjugaison des feuilletages analytiques de  $T^3$  . . . . . p. 109

## INTRODUCTION

Les problèmes rencontrés dans l'étude des feuilletages de codimension 1 sont essentiellement de deux types : les problèmes d'existence, les problèmes de classification. Par exemple, les seules surfaces compactes qui possèdent des flots sans points fixes sont le tore  $T^2$  et la couronne  $S^1 \times I$  et, les théorèmes de Bendixson-Poincaré et A. Denjoy permettent de les classier dès que leur classe de différentiabilité est supérieure ou égale à 2. Puisque les feuilletages de codimension 1 d'une variété compacte sont une généralisation des flots sans points fixes, il est naturel de chercher comment peuvent-être étendus aux feuilletages les définitions et les résultats de ces auteurs.

Dans sa thèse, G. Reeb constate que les notions de trajectoires propres, exceptionnelles, denses, introduites par A. Denjoy se généralisent pour les feuilles d'un feuilletage. Une des premières questions qui se posent alors lorsque l'on cherche à classier les feuilletages  $\mathcal{F}$  d'une variété compacte  $M^n$  est : quelle est l'adhérence d'une feuille d'un feuilletage  $\mathcal{F}$  ? Pour répondre à cette question, il est nécessaire d'étudier les sous-ensembles compacts de la variété, saturés pour la relation d'équivalence associée à  $\mathcal{F}$  ( $x \sim x'$  si  $x$  et  $x'$  appartiennent à une même feuille  $L \in \mathcal{F}$ ) et plus particulièrement, ceux qui sont minimaux parmi ces sous-ensembles pour la relation d'inclusion. Un ensemble minimal  $K$  de  $\mathcal{F}$  est d'un des trois types suivants :

- i)  $K = M^n$ , alors les feuilles de  $\mathcal{F}$  sont partout denses dans  $M^n$ .
- ii)  $K = L_0$ , une feuille compacte de  $\mathcal{F}$ .
- iii)  $K \subset M^n$  est une réunion de feuilles exceptionnelles.

R. Sacksteder dans [22] a construit un feuilletage possédant un ensemble minimal exceptionnel (du type iii)). Dans son exemple les feuilles

de  $K$  ont une infinité de bouts et il semble difficile de pouvoir les classifier.

Avant de poursuivre l'étude topologique des feuilles de  $\mathcal{F}$ , il est donc utile de chercher des conditions suffisantes pour que  $\mathcal{F}$  ne possède pas d'ensemble minimal exceptionnel. Le théorème 1 de [24], qui est une très belle généralisation du théorème de A. Denjoy, en fournit une pour un feuilletage de classe  $r \geq 2$ . Dans le même article, l'auteur en déduit que : si  $\mathcal{F}$  a une holonomie nulle, à tout flot  $\psi$  transverse à  $\mathcal{F}$  est associé un flot topologique  $\psi'$  dont les trajectoires sont les mêmes que celles de  $\mathcal{F}$  et  $\psi'$  laisse globalement invariant  $\mathcal{F}$ .

De ce théorème, H. Rosenberg déduit dans [17] que si  $M^n$  possède un feuilletage par des plans  $\mathbb{R}^{n-1}$ ,  $M^n$  a le type d'homotopie d'un tore  $T^n$ , et que pour  $n = 3$   $M^3$  est homéomorphe à  $T^3$ . Si  $n \geq 5$ ,  $M^n$  est aussi homéomorphe à  $T^n$  [27]. Avec G. Joubert, j'ai montré que ce résultat reste vrai pour  $n = 4$ , en utilisant le raisonnement de D. Tischler [29] qui permet d'affirmer qu'une variété compacte  $M^n$  est fibrée sur  $S^1$  dès qu'elle possède un feuilletage sans holonomie.

En fait, le résultat que nous avons obtenu est une conséquence du théorème suivant : si  $\mathcal{F}$  est un feuilletage sans holonomie de  $M^n$ , les feuilles de  $\mathcal{F}$  sont des revêtements de la fibre d'une certaine fibration de  $M^n$  sur  $S^1$ . De ce dernier résultat j'ai en outre déduit :

- qu'une variété  $M^n$  à bord  $\partial M$  non connexe est homéomorphe à  $T^{n-1} \times I$  si elle possède un feuilletage par des "rubans"  $\mathbb{R}^{n-2} \times I$  et si  $n = 3$  ou  $n \geq 5$ .

- une méthode de construction de feuilletages sans holonomie de classe  $C^r$  sur des  $C^r$ -fibrés sur  $S^1$ .

L'existence de ces feuilletages a deux conséquences :

1 - Une variété qui possède un feuilletage par des plans  $\mathbb{R}^{n-1}$  n'est pas nécessairement difféomorphe à  $T^n$ . En fait on peut construire des feuilletages des tores exotiques  $T^n$ , pour  $n \geq 7$ , dont les feuilles sont difféomorphes à  $\mathbb{R}^{n-1}$ .

2 - Tout champ de  $(n-1)$  plans d'une variété fibrée sur  $S^1$  dont le premier

groupe d'homologie n'a pas de torsion est homotope à un champ de (n-1) plans intégrable.

Après avoir appliqué le théorème de R. Sacksteder aux feuilletages sans holonomie, nous l'avons appliqué dans le chapitre III à des feuilletages moins particuliers : les feuilletages dont toutes les feuilles non compactes ont une holonomie nulle. Nous les avons appelés feuilletages presque sans holonomie. Après avoir étudié les groupes abéliens de germes de difféomorphismes de  $\mathbb{R}^+$ , il est facile de montrer que le groupe d'holonomie d'une feuille compacte d'un tel feuilletage est abélien ; on en déduit :

- une réponse positive à la conjecture suivante de G. Reeb : le tore  $T^2$  est la seule surface  $V^2$  pour laquelle il existe un feuilletage (de classe  $\geq 2$ ) de  $V^2 \times I$  dont les feuilles de l'intérieur sont des plans. Plus généralement, il est montré que la conjecture est encore vraie pour tout  $n \geq 2$ .

- le fait que, si les feuilles non compactes d'un feuilletage  $\mathcal{F}$  d'une variété de dimension 3,  $M^3$ , sont des plans  $\mathbb{R}^2$ , alors ses feuilles compactes sont des tores  $T^2$  et  $\mathcal{F}$  ne possède pas de feuilles exceptionnelles. Ce dernier résultat est une généralisation du théorème de A. Denjoy.

La définition des feuilletages presque sans holonomie n'étant pas très restrictive et les propriétés qui s'en déduisent assez fortes, nous avons cherché des conditions suffisantes pour qu'un feuilletage  $\mathcal{F}$  d'une variété compacte  $M^n$  soit presque sans holonomie. La première étape dans cette recherche est de trouver des conditions suffisantes pour qu'un tel feuilletage ne possède pas d'ensemble minimal exceptionnel. C'est avec R. Roussarie [1] que j'ai trouvé les suivantes

A - L'injection  $i_L : L \rightarrow M^n$  induit un monomorphisme  $i_{L*}$  de  $\pi_1(L)$  dans  $\pi_1(M)$

B - L'image de  $i_{L*}$  contient le sous-groupe des commutateurs de  $\pi_1(M)$ .  
pour toutes feuilles  $L$  de  $\mathcal{F}$ .

Ces deux conditions sont en particulier vérifiées par les feuilletages sans holo

De ce résultat nous avons déduit que si  $\mathcal{F}$  possède les propriétés A et B et - s'il n'a pas de feuilles compactes, c'est un feuilletage sans holonomie.

Appliqué aux feuilletages de  $T^3$ , ce résultat fournit une généralisation du théorème de A. Denjoy et une réponse positive à la conjecture suivante de H. Rosenberg : un feuilletage de  $T^3$  par des cylindres  $S^1 \times \mathbb{R}$  est sans holonomie.

- s'il possède des feuilles compactes, toute feuille contient dans son adhérence une feuille compacte. Ce dernier résultat est une généralisation du théorème de Poincaré-Bendixson. En étudiant le comportement d'un tel feuilletage le long de ses feuilles compactes on en déduit que si les injections  $i_{L_0} : L_0 \hookrightarrow M$  des feuilles compactes  $L_0$  de  $\mathcal{F}$  induisent des homomorphismes surjectifs,  $i_{L_0*} : H_1(L_0) \rightarrow H_1(M)$ , alors  $\mathcal{F}$  est presque sans holonomie et il ne possède pas de feuille exceptionnelle. Appliqué aux feuilletages de variétés du type  $V^{n-1} \times I$  ce dernier résultat généralise [15] ; d'autre part, il permet de décrire les feuilletages de  $T^n$  définis par une action localement libre de  $\mathbb{R}^{n-1}$ .

Dans le paragraphe IV, les résultats obtenus dans les chapitres précédents sont appliqués aux feuilletages de classe  $r > 2$  des variétés compactes, de dimension trois. On appelle feuilletage de Reeb généralisé un feuilletage  $\mathcal{F}$  de  $M^3$  dont les feuilles compactes sont des composantes de  $\partial M^3$ , homéomorphes à  $T^2$ . Il est montré qu'une variété  $M^3$  qui possède un tel feuilletage  $\mathcal{F}$  est fibrée sur  $S^1$  et que ce feuilletage se déduit d'un feuilletage sans holonomie de  $M^3$  (transverse à  $\partial M^3$ ) par des tourbillonnements généralisés autour des tores  $T^2$  dont la réunion est  $\partial M^3$ . Il est alors facile de montrer qu'un feuilletage presque sans holonomie de  $S^3$  qui ne possède qu'une seule feuille compacte est obtenu en faisant tourbillonner une fibration sur  $S^1$  du complémentaire d'un noeud de type fini.

Pour un feuilletage  $\mathcal{F}$  d'une variété  $M^3$  de dimension trois, la condition A est équivalente à l'absence de composante de Reeb [13]. La condition B étant satisfaite dès que  $\pi_1(M^3)$  est abélien, tout feuilletage sans composante de Reeb

de  $T^3$  ou  $T^2 \times I$  est presque sans holonomie et il ne possède pas de feuilles exceptionnelles car la 3<sup>ème</sup> condition est aussi satisfaite. R. Roussarie et moi-même avons utilisé cette remarque pour déterminer les classes de conjugaison (topologique) des feuilletages de  $T^3$  (ou  $T^2 \times I$ ) sans composantes de Reeb [12]. Les résultats obtenus généralisent la classification bien connue des feuilletages de  $T^2$  (ou  $S^1 \times I$ ).

Enfin, nous en avons déduit que : tout feuilletage analytique de  $T^3$  (ou  $T^2 \times I$ ) est une suspension d'un feuilletage de  $T^2$  modifiée par un nombre fini de tourbillonnements de Reeb.

Le plan de ce travail est le suivant : dans le chapitre I nous étudions d'une façon générale les feuilletages de codimension 1. Le chapitre II, consacré aux feuilletages sans holonomie, n'utilise pas les résultats de I. Le chapitre III contient les résultats sur les feuilletages presque sans holonomie qui sont appliqués dans le chapitre IV aux feuilletages des variétés de dimension 3. Chaque chapitre est précédé d'un bref résumé.

## I - Généralités sur les feuilletages de codimension 1.

Ce Chapitre est décomposé en cinq paragraphes. Le premier est consacré à l'étude des groupes abéliens de germes de difféomorphismes de  $\mathbb{R}^+$  ; on étudie plus particulièrement, avec le théorème 1.1, la nature des orbites d'un point de  $\mathbb{R}^+$  par un pseudo-groupe réalisation d'un tel groupe. Ce théorème et les remarques qui s'en déduisent sont utilisés dans le paragraphe 3 pour étudier le germe d'un feuilletage le long d'une feuille compacte.

Dans le paragraphe 2, il est tout d'abord rappelé les notions d'holonomie et de cycles évanouissants. Ensuite, le théorème 1.3 fournit une condition nécessaire et suffisante pour qu'une application continue d'un compact dans une feuille se relève dans les feuilles voisines.

Au début du paragraphe 4, il est rappelé quelques méthodes de construction et de déformation de transversales fermées. Ceci nous permet ensuite de montrer : que dans un feuilletage sans cycle évanouissant, deux transversales fermées homotopes coupent les mêmes feuilles. (Théorème 1.4) et que, dans une composante orientée au sens de Novikov, il existe une transversale fermée qui coupe toutes les feuilles (Théorème 2.4).

Enfin, dans le dernier paragraphe, on constate comment l'étude des feuilletages transverses au bord peut se ramener à l'étude des feuilletages des variétés fermées en passant au double.

### 1. Pseudo-groupe de $\mathbb{R}^+$ réalisation d'un groupe de germes en 0.

Soit  $\mathcal{D}^r$ ,  $r \geq 0$  (ou  $r = \omega$ ), l'ensemble des difféomorphismes locaux de  $\mathbb{R}^+$  de classe  $r$  (ou analytiques) définis sur des intervalles de la forme  $[0, \varepsilon]$  ( $\varepsilon > 0$ ) et dont zéro est un point fixe. On désigne par  $\mathcal{G}^r$  le groupe des germes en zéro des éléments de  $\mathcal{D}^r$  et par  $J_0$  l'application de  $\mathcal{D}^r$  dans  $\mathcal{G}^r$  qui à un

difféomorphisme  $f$  associe son germe en zéro. On munit  $\mathcal{L}_y^r$  de l'ordre partiel suivant :

$$J_0(f) < J_0(g)$$

si et seulement s'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que

$$f(s) < g(s) \quad \text{pour tout } s \in (0, \varepsilon].$$

Cette relation d'ordre est compatible avec la structure de groupe de  $\mathcal{L}_y^r$ . Un élément inférieur à l'élément neutre (le germe de l'identité) est une contraction, un élément supérieur à l'élément neutre est une expansion.

Soit  $G$  un sous-groupe de type fini de  $\mathcal{L}_y^r$ . On appelle réalisation de  $G$  un pseudo-groupe  $P \subset \mathcal{D}^r$  engendré par un nombre fini d'éléments de  $\mathcal{D}^r$  tel que  $J_0$  applique  $P$  sur  $G$ . De la même façon que pour un groupe de difféomorphismes de  $\mathbb{R}^+$  on définit l'orbite  $s.P$  d'un point  $s$  de  $\mathbb{R}^+$  par  $P$  : c'est l'ensemble des  $s' \in \mathbb{R}$  tels que  $s' = f(s)$  où  $f$  est un élément de  $P$ .

On dit que  $G$  est contractant s'il existe une réalisation  $P$  de  $G$  et  $s > 0$  tels que zéro soit adhérent à  $s.P$ . On dit que  $G$  est sans point fixe s'il existe une réalisation  $P$  de  $G$  telle que, si un élément  $f \in G$  possède un point fixe autre que zéro, alors  $J_0(f)$  est l'élément neutre de  $\mathcal{L}_y^r$ .

Enfin rappelons qu'un groupe  $G$  ordonné est archimédien s'il est muni d'une relation d'ordre total, compatible avec sa structure de groupe et si, par exemple,  $G^-$  désignant l'ensemble des éléments de  $G$  inférieurs à l'élément neutre, pour tout  $(g, h) \in G^- \times G^-$  il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $h^n < g$ . Il est bien connu qu'un tel groupe de type fini est abélien libre et qu'il s'identifie (à une constante multiplicative près) à un sous-groupe du groupe additif  $\mathbb{R}$ .

Proposition 1.1. Pour un sous-groupe  $G$  de type fini de  $\mathcal{L}_y^r$ ,  $r \geq 2$ , les propriétés suivantes sont équivalentes :

i)  $G$  est sans point fixe.

ii)  $G$  est un groupe archimédien pour l'ordre induit par celui de  $\mathcal{L}^r$ .

iii)  $G$  est abélien contractant.

iv)  $G$  est abélien et il existe  $p$  contractions ( $p \in \mathbb{N}$ ) qui commutent deux à deux et dont les germes en zéro sont les éléments d'une base de  $G$ .

Démonstration : On va montrer que  $i) \implies ii) \implies iii) \implies iv) \implies i)$ .

i) implique ii) : Soit  $P$  une réalisation de  $G$  qui vérifie la condition énoncée dans la définition d'un groupe de germes sans point fixe. Si  $J_0(f)$  et  $J_0(g)$  sont deux éléments distincts de  $G$  où  $f$  et  $g$  appartiennent à  $P$ ,  $J_0(f) \cdot (J_0(g))^{-1} = J_0(f \cdot g^{-1})$  est distinct de  $e$  et ainsi  $f \cdot g^{-1}$  n'a pas de point fixe autre que zéro. C'est donc soit une contraction, soit une expansion et ainsi

$$J_0(f \cdot g^{-1}) < e \quad \text{ou} \quad e < J_0(f \cdot g^{-1})$$

La relation d'ordre étant compatible avec la structure de groupe, on obtient

$$J_0(f) < J_0(g) \quad \text{ou} \quad J_0(g) < J_0(f).$$

Ainsi  $G$  est totalement ordonné. Soient  $J_0(f)$  et  $J_0(g)$  deux éléments de  $G^-$  ( $f, g \in P$ ) et  $s$  un point de  $\mathbb{R}^+$  où  $f$  et  $g$  sont simultanément définis. Puisque  $f$  est une contraction, la suite  $\{f^n(s)\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers zéro et il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $f^n(s) < g(s)$ . Or  $f^n \cdot g^{-1}$  ne possédant pas de point fixe autre que zéro,  $f^n(s') < g(s')$  pour tout  $s' \in [0, s]$ . Ainsi, il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $J_0(f^n) < J_0(g)$ .

ii) implique iii) : Puisque  $G$  est archimédien il est abélien libre. Soit  $J_0(f)$  un élément de  $G^-$ . Par définition de l'ordre sur  $G$  (induit par l'ordre de  $\mathcal{L}^r$ ), il existe  $\varepsilon > 0$  tel que :

$$f(s) < s \quad \text{pour} \quad s \in [0, \epsilon].$$

Ainsi, la restriction de  $f$  à  $[0, \epsilon]$  est une contraction et la suite  $f^n(\epsilon)$  (où  $n \in \mathbb{N}$ ) converge vers zéro.

iii) implique iv) :  $G$  étant un sous-groupe de type fini de  $\mathcal{L}^r$ , il est abélien libre. Désignons par  $p$  sa dimension et soit  $P$  une réalisation de  $G$  qui satisfait à la condition imposée dans la définition d'un groupe de germes contractant. Il est facile de montrer qu'il existe  $\epsilon > 0$  et  $p$  éléments  $f_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ , de  $P$  tels que :

$\alpha$ ) Pour  $1 \leq i \leq p$  les  $f_i$  sont définis sur  $[0, \epsilon]$  et  $f_i(\epsilon) < \epsilon$ .

$\beta$ ) Pour tout couple  $(i, j)$ , où  $1 \leq i, j \leq p$ , les difféomorphismes  $f_i$  et  $f_j$  commutent.

$\gamma$ ) La réalisation  $P_\epsilon$  de  $G$  engendrée par les  $\{f_i\}_{1 \leq i \leq p}$  est telle que l'orbite  $\epsilon.P_\epsilon$  de  $\epsilon$  contient zéro dans son adhérence.

Montrons tout d'abord qu'un au moins des  $f_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$  est contractant. Supposons le contraire, c'est à dire que chaque  $f_i$  possède au moins un point fixe autre que zéro et montrons alors que  $\gamma$ ) ne peut-être satisfait. Soit  $s_1$  un point fixe de  $f_1$ . Ce n'est pas un point fixe des  $f_i$  pour  $i = 2, 3, \dots, p$  sinon  $P$  ne satisfait pas à  $\gamma$ ). Supposons par exemple que  $s_1$  n'est pas un point fixe de  $f_2$ . Puisque  $f_2(\epsilon) < \epsilon$ , on peut définir la suite  $\{f_2^n(s_1)\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Cette suite converge vers un point fixe de  $f_1$  et  $f_2$  distinct de 0 car  $f_2$  n'est pas contractant.

Supposons qu'il existe  $s_k \neq 0$ , avec  $k < p$ , tel que  $s_k$  est un point fixe des  $f_i$  pour  $i = 1, 2, \dots, k$ . Par le même raisonnement on montre qu'il existe  $s_{k+1}$  qui est un point fixe pour  $f_i$  avec  $i = 1, 2, \dots, k+1$ . On en déduit que les  $f_i$ , pour  $i = 1, 2, \dots, p$ , possèdent un point fixe commun, ce qui est incompatible avec  $\gamma$ ). Ainsi, l'un de ces éléments,  $f_1$  par exemple ne possède pas de point fixe sur  $[0, \epsilon]$ . Ce difféomorphisme est contractant puisque  $f_1(\epsilon) < \epsilon$ . Le résultat est alors une conséquence évidente du lemme 1 de [7].

iv) implique i) est encore une conséquence évidente du lemme 1 de [7].

Théorème 1.1. Soient  $G$  un sous-groupe archimédien de type fini de  $\mathbb{Q}^r$ ,  $r \geq 2$ , et  $P$  une réalisation de  $G$ . Alors il existe  $\varepsilon > 0$  tel que

- si  $G$  possède deux générateurs indépendants l'orbite d'un point  $s \in [0, \varepsilon]$  par  $P$  est dense sur  $[0, \varepsilon]$ .

- si  $G$  est cyclique, l'orbite d'un point par le pseudo-groupe  $P_\varepsilon$  engendré par les restrictions des éléments de  $P$  à  $[0, \varepsilon]$  est discrète, son seul point d'accumulation étant zéro.

Ce théorème généralise un résultat obtenu par G. Reeb sur les difféomorphismes de  $[0, 1]$ . On en déduira, comme il l'a fait, dans le chapitre III, que, sous certaines conditions (homotopiques), un feuilletage ne possède pas de feuilles exceptionnelles.

Démonstration : Envisageons tout d'abord le cas où  $G$  ne possède qu'un seul générateur. Puisque  $P$  est engendré de façon finie, il existe  $\varepsilon > 0$  et  $f : [0, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^+$  contractant tels que, pour tout  $f'$  de  $P$ ,

$$f'(s) = f^n(s) \quad \text{si } s \in [0, \varepsilon] \text{ et } n \in \mathbb{Z}.$$

Ainsi  $P_\varepsilon$  est engendré par  $f$  et l'orbite  $s.P_\varepsilon$  de  $s$  par  $P_\varepsilon$  est un sous-ensemble discret de  $[0, \varepsilon]$ .

Dans le second cas, d'après la proposition précédente, il existe deux éléments  $f, g : [0, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^+$ , contractants, qui commutent, appartenant à  $P$  tels que,  $f^n(s) \neq f^p(s)$  pour tout  $s \in (0, \varepsilon]$  et tout  $(n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ . Sur la couronne  $S^1 \times [0, \varepsilon]$ , il est facile de construire un champ de vecteurs de classe  $r$  (si  $f$  est de classe  $r$ ) dont toute courbe intégrale  $\ell$  possède les propriétés suivantes :

-  $\ell$  coupe transversalement le cercle  $S^1 \times \{\varepsilon\}$ .

-  $\ell$  est transverse au facteur  $(0, \varepsilon]$

- Si  $(0, s)$  est un des points d'intersection de  $\ell$  avec  $\{0\} \times (0, \varepsilon]$ ,  $\ell$  recoupe cet intervalle suivant les points  $(0, s_n)$  avec  $s_n = f^n(s)$  ( $f_n = f \circ f^{n-1}$ ). On désigne par  $\mathcal{S}$  le feuilletage défini par ce champ de vecteurs, il peut, par exemple, être construit par la méthode de [4] page 10.

Soit  $\bar{f} : (0, \varepsilon] \rightarrow S^1$ , qui au point  $s \in (0, \varepsilon]$  fait correspondre le point  $\bar{f}(s)$  de  $S^1$  tel que la trajectoire de  $\mathcal{S}$  passant par  $(0, s)$  coupe  $S^1 \times \{\varepsilon\}$  au point  $(\bar{f}(s), \varepsilon)$ . La restriction de  $\bar{f}$  à un intervalle de la forme  $(f(s), s)$

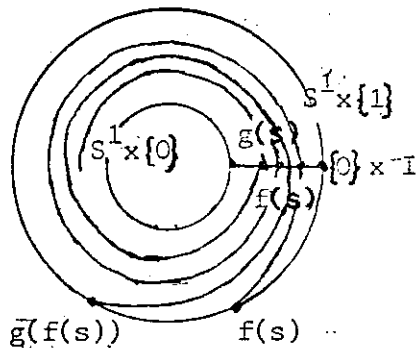


Figure 1.1.

est un difféomorphisme de même classe que  $f$  sur  $S^1 - \bar{f}(s)$ . D'autre part, si

$$\bar{f}(s) = \bar{f}(s') \quad \text{et } s' < s$$

il existe un entier  $n$  tel que  $s' = f^n(s)$ , par définition de  $f$ . On va montrer qu'il existe un difféomorphisme unique,  $\bar{g}$ , de  $S^1$ , sans point périodique, tel que :

$$\bar{g} \circ \bar{f} = \bar{f} \circ g$$

i)  $\bar{g}$  est bien défini : En effet, si

$$0 < s' < s < \varepsilon \quad \text{et } \bar{f}(s) = \bar{f}(s')$$

il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $s' = f^n(s)$  et ainsi

$$\bar{f}(g(s')) = \bar{f}(g(f^n(s))) = \bar{f}(f^n(g(s))) = \bar{f}(g(s)).$$

ii)  $\bar{g}$  est un difféomorphisme : En effet,  $\bar{f}$  étant localement un difféomorphisme et  $g$  un difféomorphisme, il nous suffit de montrer que  $\bar{g}$  est injective. Soient  $s$  et  $s'$  tels que

$$0 < s' < s < \varepsilon \quad \text{et} \quad \bar{g}(\bar{f}(s)) = \bar{g}(\bar{f}(s'))$$

Il existe alors  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $g(s') = f^n(g(s))$  ; alors  $s' = f^n(s)$  et  $\bar{f}(s) = \bar{f}(s')$  puisque  $f$  ne possède pas de point fixe et que  $f$  et  $g$  commutent.

iii)  $\bar{g}$  n'a pas de point périodique : en effet s'il existe  $s$  appartenant à  $(0, \varepsilon]$  et  $p \in \mathbb{N}$  tels que

$$\bar{g}^p(\bar{f}(s)) = \bar{f}(s) = \bar{f}(g^p(s))$$

Puisque  $g$  est contractant il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $g^n(s) = f^n(s)$ . Cette dernière égalité entraîne  $p = n = 0$ .

Du théorème de A. Denjoy [1] on déduit que  $\bar{g}$  est conjugué à une rotation d'angle  $\alpha$  irrationnel. Alors, quel que soit  $s$  appartenant à  $(0, \varepsilon]$  l'ensemble des points  $\{\bar{g}^n(\bar{f}(s))\}_{n \in \mathbb{N}}$  est dense sur  $S^1$  et il est contenu dans l'image par  $\bar{f}$  de l'orbite s.P du point  $s$  par  $P$  puisque

$$\bar{g}^n(\bar{f}(s)) = \bar{f}(g^n(s))$$

D'autre part, pour  $s_0$  appartenant à  $(0, \varepsilon]$ , la restriction de  $\bar{f}$  à  $(f(s_0), s_0)$  étant un difféomorphisme sur  $S^1 - \bar{f}(s_0)$ , l'orbite sP est dense dans  $[s_0, f(s_0)]$ , elle l'est donc aussi sur  $[0, \varepsilon]$ . (1)

Remarque 1.1. : H. Rosenberg et G. Châtelet ont montré dans le lemme 4 de [3] que l'angle  $\alpha$  de la rotation irrationnelle à laquelle est conjugué  $\bar{g}$  est obtenu de la façon suivante : l'image par  $J_0$  du pseudo-groupe engendré par  $f, g$  étant un sous-groupe archimédien de  $\mathcal{G}^r$ , quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $k(n) \in \mathbb{N}$  tel que :

$$J_0(g)^{k(n)+1} < J_0(f)^n < J_0(g)^{k(n)} \quad (1)$$

Alors on a,

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(n)}{n}$$

(1) Il est possible de démontrer ce théorème sans utiliser le théorème de A.DENJOY.

On peut encore préciser ce résultat [12] dans les deux cas suivants :

i) Si  $f$  n'est pas tangent en zéro, à l'application identique, il en est de même pour  $g$ . De la double inégalité (1) il résulte que  $k(n)$  est déterminé par

$$g'(0)^{k(n)+1} < f'(0)^n < g'(0)^{k(n)} \quad (1')$$

On en déduit :

$$\alpha = \frac{\text{Log } g'(0)}{\text{Log } f'(0)}$$

ii) Si  $f$  est tangente, en zéro, à l'application identique jusqu'à l'ordre  $p-1 < r$  ( $f$  étant de classe  $r$ ), alors il en est de même pour  $g$  [7] et ainsi ,

$$f(s) = s + \frac{f^{(p)}(0)}{p!} \cdot s^p + \dots$$

$$g(s) = s + \frac{g^{(p)}(0)}{p!} \cdot s^p + \dots$$

De la double inégalité (1) il résulte que  $k(n)$  est déterminé par

$$g^{(p)}(0)^{k(n)+1} < f^{(p)}(0) < g^{(p)}(0)^{k(n)} \quad (1'')$$

On en déduit :

$$\alpha = \frac{g^{(p)}(0)}{f^{(p)}(0)}$$

Remarque 2.1. Soit  $J_0(f_1), \dots, J_0(f_p)$  une base de  $G$  où les  $f_i$  sont des contractions (proposition 1.1). Le théorème précédent permet d'associer à chaque  $f_i$  pour  $i \geq 2$  un difféomorphisme  $\bar{f}_i$  de  $S^1$  sans point périodique ( $f_1$  jouant le rôle de  $f$ ). Désignons par  $\alpha_i, i \geq 2$ , l'angle de la rotation irrationnelle conjuguée à  $\bar{f}_i$  et soit alors  $\theta_1 : G \rightarrow \mathbb{R}$  l'application linéaire définie par :

$$\theta_1(J_0(f_i)) = \alpha_i \quad \text{pour } i \geq 2 \quad \theta_1(J_0(f_1)) = 1.$$

Il est facile de vérifier que  $\theta_1$  est un plongement de  $G$  dans  $\mathbb{R}$  (en temps que groupe archimédien ordonné). Si  $\theta : G \rightarrow \mathbb{R}$  est un autre plongement alors

$$\theta = \lambda \theta_1 \quad \text{avec } \lambda = \theta(J_0(f_1))$$

Cette interprétation du théorème précédent est développée dans [12] : il est montré qu'il existe un homéomorphisme  $h$  de  $\mathbb{R}^+$  qui conjugue  $G$  à un groupe de

difféomorphismes linéaires de  $\mathbb{R}$ . Alors, si  $J_0(f) \in G$ ,  $J_0(h.f.h^{-1})$  est le germe d'une application linéaire  $\ell_{a_f} : s \longrightarrow a_f.s$  et on vérifie facilement que l'application :

$$\theta : G \longrightarrow \mathbb{R} \text{ telle que } \theta(J_0(f)) = \text{Log } a_f$$

est un plongement de  $G$  dans  $\mathbb{R}$ .

## 2. Holonomie et relèvement suivant les normales.

Dans ce paragraphe  $\mathcal{F}$  désigne un feuilletage de codimension 1, de classe  $r \geq 2$ , transversalement orientable d'une variété  $M^n$  paracompacte et orientable. Si  $M^n$  a un bord  $\partial M$ , on suppose que  $\mathcal{F}$  est tangent à  $\partial M$ .

Une métrique, riemannienne étant choisie sur  $M^n$ , on associe à  $\mathcal{F}$  un champ de vecteurs,  $X$ , unitaires, de classe  $r-1$ , normal au champ de  $(n-1)$  plans tangents aux feuilles de  $\mathcal{F}$ . En un point  $s \in M - \partial M$  on désigne par  $n_a : [0, \epsilon] \longrightarrow M$  un segment d'intégrale de  $X$  tel que

$$n_a(0) = 0, \quad \frac{d}{ds}(n_a(s)) = X(n_a(s)).$$

Lorsque  $a$  appartient à  $\partial M$ , si le champ est rentrant en  $a$ , on définit de la même façon  $n_a$ . Lorsque nous étudierons le feuilletage  $\mathcal{F}$  au voisinage du bord, ce sera toujours le long d'une composante connexe, qui est une feuille et on supposera que le champ est rentrant sur cette feuille.

Le feuilletage  $\mathcal{F}$  est orienté par  $X$  et dans la suite nous distinguerons les côtés positifs  $L^+$  et  $L^-$  d'une feuille  $L$  de  $\mathcal{F}$ . Lorsqu'on étudiera le feuilletage au voisinage d'une feuille ce sera toujours du côté positif (sauf mention contraire). Toutes les définitions et tous les résultats énoncés pour le côté positif se transposent pour le côté négatif. Nous allons tout d'abord rappeler des notions connues afin de préciser les notations.

Définition 1.2. : Soient  $L$  une feuille de  $\mathcal{F}$ ,  $\alpha$  un chemin dans  $L$  d'origine  $a$ , d'extrémité  $b$ . On dit que  $\alpha$  se relève suivant les normales dans les feuilles voisines s'il existe  $\varepsilon > 0$  et une application continue unique

$$F : [0,1] \times [0,\varepsilon] \rightarrow M^n \quad \text{tels que}$$

i) Pour tout  $t \in [0,1]$ , l'application  $s \rightarrow F(t,s)$  définit un segment de trajectoire de  $X$ , en outre pour  $t = 0$ ,  $F(0,s) = n_a(s)$ .

ii) Pour tout  $s \in [0,\varepsilon]$ , l'application  $t \rightarrow F(t,s)$  est un chemin  $\alpha_s$  dans la feuille  $L_s$ , passant par le point  $n_a(s)$ , et en outre  $\alpha_0 = \alpha$ .

On dit que le chemin  $\alpha_s$  est le relèvement suivant les normales à la hauteur  $s$  de  $\alpha$ . Tout lacet  $\alpha$  dans une feuille  $L$  se relève suivant les normales (Lemme 1, page 13 de [20]). En outre, si  $\alpha$  est immersion (respectivement un plongement),  $F$  est aussi une immersion de même classe (respectivement un plongement).

Lorsque  $\alpha$  est un lacet en  $a$  dans  $L$ , à un relèvement  $F$  de  $\alpha$  suivant les normales correspond un élément  $f_\alpha$  de  $\mathcal{D}^r$  défini, pour  $s \in [0,\varepsilon]$ , de la façon suivante :

$$f_\alpha(s) = s' \quad \text{si } n_a(s') = \alpha_s(1).$$

On montre facilement que le germe en zéro de  $f_\alpha$  ne dépend que de la classe de  $\alpha$  dans  $\pi_1(L,a)$ . L'application

$$\varphi_a : \pi_1(L,a) \rightarrow \mathcal{L}^r, \quad \text{telle que } \varphi_a([\alpha]) = J_0(f_\alpha)$$

est un homomorphisme. On désigne par  $N(L^+,a)$  son noyau, par  $G(L^+,a)$  son image et par  $P(L^+,a)$  le pseudo-groupe engendré par les éléments  $f_\alpha$  de  $\mathcal{D}^r$ , où  $\alpha$  est un lacet dans  $L$  en  $a$ .

Puisque nous avons défini les relèvements d'un chemin dans les feuilles voisines en utilisant des arcs de normales,  $\varphi_a$  dépend de la métrique riemannienne

choisie sur  $M$  et ce n'est pas un invariant de  $\mathcal{F}$ . Mais si on choisit une autre métrique riemannienne sur  $M$ , on définit de la même façon au point  $a$ , un homomorphisme,  $\varphi'_a : \pi_1(L, a) \rightarrow \mathcal{L}^R$ ; il se déduit de  $\varphi_a$  par un automorphisme intérieur de  $\mathcal{L}^R$ . Ainsi une métrique étant choisie sur  $M^n$ , on peut dire que :

- $\varphi_a$  est l'homomorphisme d'holonomie positive en  $a$ .
- $G(L^+, a)$  est le groupe d'holonomie positive en  $a$ .
- $P(L^+, a)$  est le pseudo-groupe d'holonomie positive en  $a$ . Un élément  $f_\alpha$  de  $P(L^+, a)$  est appelé un difféomorphisme local d'holonomie positive (correspondant au lacet  $\alpha$ ).

Si  $a$  et  $b$  sont deux points d'une même feuille  $L$ , on montre aussi que les deux homomorphismes d'holonomie  $\varphi_a$  et  $\varphi_b$  sont conjugués par un automorphisme intérieur de  $\mathcal{L}^R$ , ce qui permet de parler de l'holonomie d'une feuille.

Remarque 1.2. Soit  $\text{Hom}(\pi_1(L, a), \mathbb{R})$  l'espace vectoriel des homomorphismes de  $\pi_1(L, a)$  dans  $\mathbb{R}$ . Lorsque  $G(L^+, a)$  est un sous-groupe archimédien de  $\mathcal{L}^R$ , à un plongement  $\theta : G(L^+, a) \rightarrow \mathbb{R}$  (remarque 2.1) correspond l'élément  $\psi = \theta \circ \varphi_a$  de  $\text{Hom}(\pi_1(L, a), \mathbb{R})$ . Si  $\theta'$  est un autre plongement  $\psi' = \theta' \circ \varphi_a$  et  $\psi$  sont linéairement dépendants. Ainsi à  $\varphi_a$  est associé un élément  $\mathcal{S}(\varphi_a)$  de la sphère des directions  $S(H^1(L, \mathbb{R}))$  de  $\text{Hom}(\pi_1(L, a), \mathbb{R}) = H^1(L, \mathbb{R})$ . De [4] on déduit facilement que, si  $L$  est une feuille propre de  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{S}(\varphi_a)$  caractérise le germe de  $\mathcal{F}$  le long de  $L^+$  à une conjugaison topologique près.

Rappelons une définition très importante liée aux relèvements des lacets suivant les normales :

Définition 2.2. Un lacet  $\alpha$  en  $a$ , dans une feuille  $L$  est un cycle évanouissant positif lorsqu'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $s \in (0, \varepsilon)$  le relèvement  $\alpha_s$  existe et  $\alpha_s$  est un lacet homotope à zéro dans la feuille  $L_s$  qui le contient. On

dira que  $\alpha$  est un cycle évanouissant non trivial si  $\alpha$  n'est pas homotope à zéro dans  $L$ .

On montre très facilement que l'ensemble des classes dans  $\pi_1(L, a)$  des cycles évanouissants est un sous-groupe normal contenu dans  $N(L^+, a)$ . On définirait de la même façon les cycles évanouissants négatifs. Rappelons le théorème de S.P. Novikov qui est lié à l'existence des cycles évanouissants.

Théorème de Novikov [13]: Si un feuilletage  $\mathcal{F}$  de codimension 1, de classe  $r \geq 2$ , orientable, d'une variété compacte de dimension 3 possède un cycle évanouissant non trivial,  $\mathcal{F}$  possède une composante de Reeb.

Rappelons aussi le critère suivant :

Proposition 1.2. [13]: Un feuilletage  $\mathcal{F}$  de  $M^n$  possède un cycle évanouissant non trivial si et seulement s'il existe une feuille  $L$  de  $\mathcal{F}$  telle que l'injection  $i_L : L \hookrightarrow M$  n'induit pas un monomorphisme entre les groupes fondamentaux.

Le théorème suivant généralise le lemme 2 de [20] page 14.

Théorème 1.2. Soit  $f : (V^p, x_0) \rightarrow (L_0, a_0)$  une application d'une variété compacte, connexe, dans une feuille  $L_0$  d'un feuilletage  $\mathcal{F}$  de  $M^n$ . Alors les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

- i) Le sous-groupe  $f_{\#}(\pi_1(V^p, x_0))$  de  $\pi_1(L_0, a_0)$  est inclus dans  $N(L_0^+, a_0)$ .
- ii) Il existe  $\epsilon > 0$  et une application continue unique

$$F : V^p \times [0, \epsilon] \rightarrow M^n \text{ tels que}$$

- a) Pour tout  $x$  appartenant à  $V^p$ , l'application  $s \rightarrow F(x, s)$  définit un segment

d'intégrale de  $X$  et de plus  $F(x_0, s) = n_{a_0}(s)$  pour tout  $s$  appartenant à  $[0, \epsilon]$

b) Pour tout  $s$  appartenant à  $[0, \epsilon]$  l'application  $f_s : x \rightarrow F(x, s)$  est une application de  $V^p$  dans la feuille  $L_s$  qui passe par  $n_{a_0}(s)$  et de plus  $f_0(x) = f(x)$  pour tout  $x$  appartenant à  $V^p$ .

L'application  $f_s$  est appelée le relèvement suivant les normales de hauteur  $s$  de  $f$ . Si  $f$  est une immersion (respectivement un plongement),  $F$  est une immersion de même classe (respectivement un plongement).

Démonstration : Nous allons seulement donner quelques indications sur la démonstration qui ressemble beaucoup à celle du lemme 2 de [20].

- Supposons que ii) est vérifié : Soient  $F$  définie sur  $V^p \times [0, \epsilon]$  et  $c$  un lacet en  $x_0$  dans  $V^p$ . Quel que soit  $s \in [0, \epsilon]$  les chemins

$$\alpha_s : I \rightarrow M^n, \text{ tels que } \alpha_s(t) = F(c(t), s)$$

sont des relèvements suivant les normales de  $\alpha = f \circ c$ . On en déduit que :

$$n_{a_0}(s) = F(c(0), s) = F(c(1), s) = \alpha_s(0) = \alpha_s(1)$$

Puisque les relèvements  $\alpha_s$  de  $\alpha$  sont des lacets,  $[\alpha] \in N(L_0^+, a_0)$  et ainsi la propriété i) est vérifiée.

- La condition  $f_{\#}(\pi_1(V^p, x_0)) \subset N(L_p, a_0)$  est suffisante : Remarquons tout d'abord que  $f(V^p)$  étant un compact de  $L$ , il existe  $v > 0$  tel que quel que soit  $a \in f(V^p)$ , le segment de normale  $n_a([0, v])$  ne coupe pas  $f(V^p)$  en un point autre que  $n_a(0) = a$ . L'unicité du relèvement suivant les normales d'un chemin dans  $L$  entraîne l'unicité de  $F$  si elle existe,  $\epsilon < v$  étant fixé.

Soient  $c_{x_1}$  et  $c'_{x_1}$  deux chemins dans  $V^p$  d'origine  $x_0$  et d'extrémité  $x_1$ . Désignons par  $\alpha$  et  $\alpha'$  leurs images par  $f$ . Il existe  $\epsilon > 0$  tel que, pour  $s \in [0, \epsilon]$ , le lacet  $\alpha \cdot \alpha'^{-1}$  en  $a_0$  possède des relèvements  $(\alpha \cdot \alpha'^{-1})_s$  suivant les normales de

hauteur  $s$ . Puisque  $\alpha \cdot \alpha'^{-1} = f \circ (c \cdot c'^{-1})$ ,  $(\alpha \cdot \alpha'^{-1})_s$  est un lacet dans la feuille  $L_s$ . Alors les chemins  $\alpha_s$  et  $\alpha'_s$  définis par

$$\alpha_s(t) = (\alpha \cdot \alpha'^{-1})_s(2t) \quad \text{et} \quad \alpha'_s = (\alpha \cdot \alpha'^{-1})(1-2t) \quad \text{où } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

sont respectivement les relèvements  $\alpha_s$  et  $\alpha'_s$  de  $f \circ c$  et  $f \circ c'$  de hauteur  $s$ .

On définit alors :

$$F' : A \longrightarrow M \quad \text{où } V^p \times \{0\} \subset A \subset V^p \times [0, v]$$

de la façon suivante :  $F'$  est définie en  $(x, s)$  s'il existe un chemin  $c$  dans  $V^p$  d'origine  $x_0$ , d'extrémité  $x$ , tel que  $f \circ c$  possède des relèvements suivant les normales jusqu'à la hauteur  $s$  et alors,

$$F'(x, s) = f \circ c_s(1) .$$

De la remarque précédente, on déduit que  $F$  est bien définie. En utilisant la compacité de  $V^p$ , on construit un recouvrement fini de  $V^p$  par des ouverts dont les images par  $f$  sont contenues dans des plaques de  $L_0$  dans des ouverts distingués de  $\mathcal{F}$ . On en déduit alors facilement qu'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $V^p \times [0, \varepsilon] \subset A$ . La continuité de  $F$  se démontre en utilisant encore le recouvrement ouvert précédent de  $V^p$  et la structure locale de produit du feuilletage.

Si  $L_0$  est une feuille compacte dont l'holonomie est nulle, en appliquant ce lemme à l'injection :  $i_{L_0} : L_0 \longrightarrow M$ , on retrouve le théorème de stabilité de G. Reeb. Avec les mêmes hypothèses que pour le théorème précédent on a :

Corollaire 12 . Soit  $g$  une application continue de  $(V^p, x_0)$  dans  $(L_0, a_0)$ , homotope à  $f$  relativement à  $x_0$ . Alors il existe  $\varepsilon'$  ( $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ ) tel que pour  $s$  appartenant à  $[0, \varepsilon']$ ,  $\mathcal{S}$  possède des relèvements suivant les normales  $g_s$  qui sont homotopes à  $f_s$  relativement à  $x_0$ .

En effet, il suffit d'appliquer le théorème précédent à une homotopie  $H$  qui relie  $f$  et  $g$ , ce qui est possible puisque

$$H_{\#} (V_p \times I, (x_0, 0)) = f_{\#} (\pi_1 (V_p, x_0)) \subset N(L_0^+, a_0)$$

### 3. Feuilles compactes :

Dans ce paragraphe  $\mathcal{F}$  désigne un feuilletage d'une variété compacte  $M^n$ , de classe  $r \geq 2$ , de codimension 1, transversalement orienté, tangent à  $\partial M$  si  $\partial M \neq \emptyset$ .

Soit  $L_0$  une feuille compacte de  $\mathcal{F}$ . (Si  $L_0$  est contenue dans  $\partial M$  on suppose que le champ  $X$  qui oriente  $\mathcal{F}$  est rentrant sur  $L_0$ ). Le lemme suivant permet d'étudier le feuilletage du côté positif  $L_0^+$  de  $L_0$ .

Lemme 1.3. Il existe une métrique riemannienne sur  $M^n$  et  $\epsilon > 0$  tels que l'application :

$$\phi : L_0 \times [0, \epsilon] \longrightarrow M^n \quad \text{où} \quad \phi(x, s) = \eta_x(s)$$

détermine un collier de  $L_0^+$  qui possède les propriétés suivantes :

i) Si  $L_0^+$  est isolée dans l'ensemble des feuilles compactes :

a) il n'existe pas de feuille entièrement contenue dans  $\phi(L_0 \times (0, \epsilon])$ .

b) il n'existe pas de feuille compacte qui coupe le collier.

$\gamma)$   $\mathcal{F}_\phi$  désignant le feuilletage induit par  $\mathcal{F}$  sur  $\phi(L_0 \times [0, \epsilon])$ ,  $l_s$  la feuille de  $\mathcal{F}_\phi$  qui passe par  $\eta_a(s)$  où  $a$  est un point fixé de  $L_0$ , il existe  $s_0 \in (0, \epsilon)$  tel que :  $l_s$  contient  $L_0$  dans son adhérence si et seulement si  $s \in [0, s_0]$  et alors la restriction  $p_s$  à  $l_s$  de la projection canonique  $p$  du collier sur  $L_0$  est surjective.

~~et~~ Si  $L_0^+$  n'est pas isolée dans l'ensemble des feuilles compactes,

a)  $\phi(L_0 \times [0, \epsilon])$  est saturé pour la relation d'équivalence associée à  $\mathcal{F}$ .

β) Les feuilles compactes situées dans le collier sont des sous variétés  $\phi(L_0 \times \{s\})$  où  $s$  appartient à un fermé  $A$  de  $[0, \varepsilon]$ .

γ) Quel que soit  $s \in [0, \varepsilon]$  la restriction  $p_s$  de  $p$  à la feuille  $L_s$  passant  $\eta_a(s)$  est un revêtement.

Remarque 1.3. Soit  $f : V^p \rightarrow L \subset M^n$  une application continue d'une variété compacte  $V^p$  dans une feuille  $L$  de  $\mathcal{F}$ , on peut alors montrer qu'il existe

- une sous variété ouverte  $N$  de  $L$  qui est un voisinage ouvert de  $f(V^p)$
- Un réel  $\varepsilon > 0$  et un plongement

$$\phi : N \times [0, \varepsilon] \rightarrow M^n, \quad \phi(a, s) = \eta_a(s)$$

tels que  $\phi(N \times [0, \varepsilon])$  possède des propriétés analogues à celles du lemme précédent. Si de plus

$$f_{\#}(\pi_1(V^p, x)) = N(L^+, a)$$

On peut choisir  $\phi$  de telle façon que le feuilletage induit par  $\mathcal{F}$  sur  $\phi(N \times [0, \varepsilon])$  soit l'image de la structure de produit de  $N \times [0, \varepsilon]$ . Cette dernière propriété permet de mieux comprendre la signification du théorème 1.2.

Le lemme 1.3 ne fait que préciser le théorème B.III.1. p. 134 de [14], aussi ne donnerons nous que quelques indications sur sa démonstration.

La compacité de  $L_0$  et la structure locale de produit du feuilletage entraîne l'existence de  $\varepsilon'$  et de  $s_0 \in (0, \varepsilon')$  tels que, quel que soit le point  $x \in L_0$

- le segment de normal  $\eta_x([0, \varepsilon'])$  ne coupe  $L_0$  qu'au point  $x$  et alors l'application  $\phi : L_0 \times [0, \varepsilon'] \rightarrow M^n$  définie par  $\phi(x, s) = \eta_x(s)$  est un collier de  $L_0^+$ .

- il existe au moins un chemin  $\alpha_x$  dans  $L_0$  d'origine  $a$  (fixé), d'extrémité  $x$  qui possède des relèvements suivant les normales  $\alpha_x$  jusqu'à la hauteur  $s$ .

Soient  $\mathcal{F}_\phi$  le feuilletage induit par  $\mathcal{F}$  sur  $\phi(L_0 \times [0, \varepsilon'])$  et  $L_s$  et  $\ell_s$  respec -

tivement les feuilles de  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}'_\phi$  qui passent par  $\eta_a(s)$ . La restriction  $p_s$  de la projection  $p : \phi(L_0 \times [0, \varepsilon']) \rightarrow L_0$  à une feuille  $\ell_s$  est surjective et c'est localement un difféomorphisme. Ainsi  $s \in (0, s_0)$  étant fixé, quel que soit  $x \in L_0$  on peut définir la borne inférieure  $s_x$  des  $s' \in (0, \varepsilon')$  tels que  $\eta_x(s') \in \ell_s$ . La structure locale de produit de  $\mathcal{F}$  entraîne que l'application

$$r_s : L_0 \rightarrow M^n, \quad r_s(x) = \eta_x(s_x)$$

applique difféomorphiquement  $L_0$  sur la feuille  $L_{s_a}$ . Les points i) et ii) vont se déduire de cette propriété de  $r_s$ .

i) Si  $L_0^+$  est isolée dans l'ensemble des feuilles compactes, on peut toujours supposer que pour tout  $x \in L_0$ ,  $\eta_x([0, \varepsilon'])$  ne rencontre pas de feuilles compactes. Ainsi la feuille  $L_{s_a}$  définie plus haut est nécessairement la feuille  $L_0$ . Les points  $\beta)$  et  $\gamma)$  sont ainsi démontrés avec  $\varepsilon = \varepsilon'$ . Supposons qu'une feuille  $L$  de  $\mathcal{F}$  soit incluse dans  $\phi(L_0 \times (0, \varepsilon))$ . Soit  $r_L : L_0 \rightarrow \phi(L_0 \times [0, \varepsilon])$  définie de la façon suivante :  $r_L(x) = \eta_x(s'_x)$  où  $s'_x$  désigne la borne supérieure de  $s' \in (0, \varepsilon)$  tels que  $\eta_x(s') \in L$ . De la même façon que pour  $r_s$  on montre que l'image  $r_L$  est une feuille compacte de  $\mathcal{F}'_\phi$ , ce qui contredit  $\beta)$ .

ii) Si  $L_0^+$  n'est pas isolée dans l'ensemble des feuilles compactes de  $\mathcal{F}$ , en prenant  $\varepsilon = s_0$ , les propriétés  $\alpha)$  et  $\gamma)$  sont évidentes et  $\beta)$  est une conséquence du lemme suivant.

Lemme 2.3. Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage de  $M^n = L \times I$  ( $L$  compacte) de classe  $r$ , transverse au facteur  $I$ ;  $a$  étant un point fixé de  $L$ , soit  $A$  le sous ensemble de  $I$  formé des  $s$  tels que la feuille qui passe par  $(a, s)$  est compacte. Alors il existe un difféomorphisme  $h : M^n \rightarrow M^n$  de même classe que  $\mathcal{F}$  tel que :

i) Pour tout  $(x,s)$ ,  $h(x,s) = (x, h_1(x,s))$  et  $h/\partial M = 1_{\partial M}$ .

ii) L'image par  $h$  d'une feuille compacte  $L_s$  passant par  $(a,s)$  (où  $s \in A$ ), est la sous-variété  $L \times \{s\}$ .

Démonstration : Tout chemin  $\alpha$  en  $(a,o) = a_o$  dans  $L_o = L \times \{o\}$  se relève suivant le facteur  $I$ , à la hauteur  $s$ , dans la feuille  $L_s$  passant par  $a_s = (a,s)$  en un chemin  $\alpha_s$ . L'extrémité de ce chemin ne dépend que de la classe d'homotopie de  $\alpha$ ; à un élément  $[\alpha] \in \pi_1(L_o, a_o)$  correspond un difféomorphisme  $f_\alpha : I \rightarrow I$  :

$$f_\alpha(s) = \alpha_s(1) \quad \text{pour tout } s \in I.$$

Soient  $\varphi : \pi_1(L_o, a_o) \rightarrow \text{Diff}^r(I)$  la représentation de  $\pi_1(L_o, a_o)$  ainsi définie, désignons par  $G(a_o)$  son image. Si un point  $s \in I$  est un point fixe pour  $G(a_o)$ , la feuille passant par  $(a,s)$  est une feuille compacte et réciproquement. L'ensemble de ces points est un fermé  $A$  de  $I$ .

Soient  $\hat{L}$  le revêtement universel de  $L$  et  $\bar{\alpha}$  l'automorphisme de ce revêtement correspondant à l'élément  $[\alpha] \in \pi_1(L_o, a_o)$ . Le quotient de  $\hat{L} \times I$  par la relation

$$(\hat{x}, s) \sim (\bar{\alpha}(\hat{x}), f_\alpha(s)) \quad \text{où } \alpha \in \pi_1(L_o, a_o)$$

est difféomorphe au produit  $L \times I$ . L'image du feuilletage trivial de  $\hat{L} \times I$  par l'application quotient est un feuilletage  $\mathcal{F}'$  de même classe que  $\mathcal{F}$  (que les éléments de  $\text{Im } \varphi$ ) transverse au facteur  $I$  [4]. La représentation de  $\pi_1(L_o, a_o)$  dans  $\text{Diff}(I)$  associée à  $\mathcal{F}'$  est encore  $\varphi$  et les feuilles compactes de  $\mathcal{F}'$  sont les sous-variétés  $L \times \{s\}$  où  $s \in A$  [4].

Soient  $(x,s)$  un point de  $L \times I$ ,  $\alpha_x$  un chemin qui joint  $x_o = (x,o)$  à  $a_o$  dans  $L_o$ ,  $\alpha_{x,s}$  le relèvement de ce chemin suivant le facteur  $I$  dans la feuille de  $\mathcal{F}'$  passant par  $(x,s)$ . L'extrémité de  $\alpha_{x,s}$  est un point  $(a,s_1)$ . Désignons par

$\alpha_{x,s_1}^{-1}$  le relèvement du chemin  $\alpha_x^{-1}$  de hauteur  $s_1$  dans la feuille de  $\mathcal{F}'$  passant par  $(a,s_1)$ . Son extrémité est un point  $(x,s)$ . Puisque les représentations de  $\pi_1(L_0, a_0)$  dans  $\text{Diff}^r(I)$  pour  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}'$  sont les mêmes,  $s'$  est indépendant du chemin  $\alpha_x$  choisi. Soit alors

$$h : L \times I \longrightarrow L \times I \text{ avec } h(x,s) = (x,s')$$

Il est facile de vérifier que  $h$  est un difféomorphisme de même classe que  $\mathcal{F}$  et, comme il applique  $\mathcal{F}$  sur  $\mathcal{F}'$ , il vérifie les deux propriétés énoncées dans le lemme.

Remarque 2.3. Si  $L_0$  est une feuille compacte non isolée dans l'ensemble des feuilles compactes d'un feuilletage  $\mathcal{F}$  de  $M^n$  (qui n'est pas une fibration sur  $S^1$ ), le plongement  $i_{L_0} : L_0 \hookrightarrow M^n$  est isotope au plongement  $i_{L_1} : L_1 \hookrightarrow M^n$  d'une feuille compacte  $L_1$  de  $\mathcal{F}$  isolée, d'un côté au moins, dans l'ensemble des feuilles compactes de  $\mathcal{F}$ . Cette isotopie est fournie par un plongement

$$H : L_0 \times I \longrightarrow M^n$$

tel que les applications  $H|_{\{x\} \times I}$  où  $x \in L_0$  ont pour image des segments de normales à  $\mathcal{F}$ .

Théorème 1.3. Soit  $L_0^+$  une feuille compacte isolée (du côté positif) dans l'ensemble des feuilles compactes d'un feuilletage  $\mathcal{F}$  (de codimension 1, orienté, de classe  $r \geq 2$ ) d'une variété compacte  $M^n$ . Si en un point  $a \in L_0$  le groupe d'holonomie  $G(L_0^+, a)$  est abélien alors

i) C'est un sous-groupe archimédien de  $\mathfrak{g}^r$ .

ii) s'il possède au moins deux générateurs indépendants, toute feuille dont l'adhérence contient  $L_0^+$  est localement partout dense dans  $M^n$ .

Si  $\varphi_a : \pi_1(L_0^+, a) \longrightarrow \mathfrak{g}^r$  est un homomorphisme d'holonomie en  $a$ , d'après la

remarque 1.2,  $S(\varphi_a) \in SH^1(L, R)$  caractérise le germe de  $\mathcal{F}$  le long de  $L_0^+$  à une conjugaison topologique près.

Démonstration : Soit  $P(L_0^+, a)$  le pseudo-groupe d'holonomie positive en  $a$ . D'après la proposition 1.1 et le théorème 1.1, il suffit de montrer que  $P(L_0^+, a)$  est contractant puisque  $G(L_0^+, a)$  est de type fini ( $L_0$  étant compacte).

Dans la suite de la démonstration, on utilise les notations de lemme 1.3. Soit  $s \in (0, s_0]$ , puisque la feuille  $l_s \in \mathcal{F}$  contient  $L_0$  dans son adhérence, il existe une suite  $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  qui tend vers zéro telle que  $\eta_a(s_n) \in l_s$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $s_1 = s$ .

Quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un chemin  $\alpha_{s_n}$  dans  $l_s$  qui joint  $\eta_a(s_n)$  à  $\eta_a(s_{n+1})$ . La projection de  $\alpha_{s_n}$  par  $p$  est un lacet  $\alpha_n$  dans  $L_0$ , en  $a$ . Le relèvement suivant les normales de hauteur  $s_n$  de  $\alpha_n$  est par définition  $\alpha_{s_n}$ . Le difféomorphisme local d'holonomie  $f_n$  associé à  $\alpha_n$  applique  $s_n$  sur  $s_{n+1}$ . Ainsi l'orbite de  $s = s_1$  par  $(P(L_0^+, a))$  contient la suite  $\{s_n\}$  et ainsi  $G(L_0^+, a)$  est contractant.

#### 4 - Transversales fermées :

- Dans ce paragraphe  $\mathcal{F}$  désigne un feuilletage de codimension 1, de classe  $r \geq 2$ , orienté par un champ normal  $X$  d'une variété compacte  $M^n$ , tangente à  $\partial M$ , si  $\partial M$  n'est pas vide.

On appelle segment transverse une immersion  $\tau$  de  $I$  (au moins  $C^1$ ) transverse aux feuilles de  $\mathcal{F}$ . Si  $\tau(0) = \tau(1)$ ,  $\tau$  est appelée une transversale fermée.  $\tau$  est dit positif(ve) (resp. négatif(ve)) si le vecteur tangent à  $\tau$  en  $\tau(t)$  et  $X(\tau(t))$  sont (resp. ne sont pas) d'un même côté du  $(n-1)$ -plan tangent à  $\mathcal{F}$  en  $\tau(t)$ . Dans la suite

nous n'utiliserons que des transversales fermées positives. Le lemme suivant donne quelques méthodes de construction et de déformation de transversales fermées.

Lemme 1.4. Soient  $L$  et  $L'$  deux feuilles de  $\mathcal{F}$ ,  $a$  et  $a'$  des points de  $L$  et  $L'$  respectivement.

i) Quels que soient le chemin  $\alpha$  dans  $L$  d'extrémité  $a$  et le segment transverse  $\tau$  positif d'origine  $a$ , d'extrémité  $a'$ , il existe un segment transverse positif  $\tau'$ , homotope à  $\alpha \cdot \tau$  et qui coupe les mêmes feuilles que  $\tau$ .

ii) Supposons  $L = L'$ . Quels que soient le segment transverse  $\tau$  positif et le chemin  $\alpha$  dans  $L$  d'origine  $a$  et d'extrémité  $a'$ , il existe une transversale fermée positive  $\tau'$  (respectivement  $\tau''$ ) homotope à  $\alpha^{-1} \cdot \tau$  (respectivement  $\tau \cdot \alpha^{-1}$ ) avec point base  $a'$  (resp.  $a$ ) qui coupe les mêmes feuilles que  $\tau$ .

iii) Supposons  $L = L'$ . Quels que soient la transversale fermée  $\tau$  qui passe par  $a$  et le chemin  $\alpha$  qui joint  $a'$  à  $a$ , il existe une transversale fermée  $\tau'$  homotope à  $\alpha \cdot \tau \cdot \alpha^{-1}$  (avec point base  $a'$ ) qui coupe les mêmes feuilles que  $\tau$ . (Naturellement on peut supposer  $a = a'$ ).

Démonstration : i) On peut toujours supposer que  $\alpha$  est une immersion de  $I$  dans  $M^n$  et qu'il existe  $v$  tel que  $n_\alpha(s) = \tau(s)$  si  $0 \leq s \leq v$ .

Soit  $F$  une application définissant un relèvement suivant les normales de  $\alpha$

$$F : I \times [0, \varepsilon] \longrightarrow M^n, \text{ avec } 0 < \varepsilon < v$$

Désignons par  $c$  un plongement de  $I$  dans  $I \times [0, \varepsilon]$  transverse au facteur  $I$  et tangent à  $\{1\} \times [0, \varepsilon]$  en  $(1, \varepsilon)$ . L'image par  $F$  de  $c$  est un segment transverse  $\tau_1$  d'extrémité le point  $n_\alpha(\varepsilon)$ . Soit alors  $\tau'_1 : I \longrightarrow M^n$  défini par :

$$\tau'(s) = \begin{cases} \tau_1\left(\frac{s}{\epsilon}\right) & \text{si } 0 \leq s \leq \epsilon \\ \tau(s) & \text{si } \epsilon \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Il est possible de lisser  $\tau'_1$  (au point  $\tau_1(\epsilon)$ ) afin d'obtenir un segment transverse homotope à  $\alpha \cdot \tau$  (relativement à  $(0,1)$ ) qui coupe les mêmes feuilles que  $\tau$ . (Fig.1.4.i)

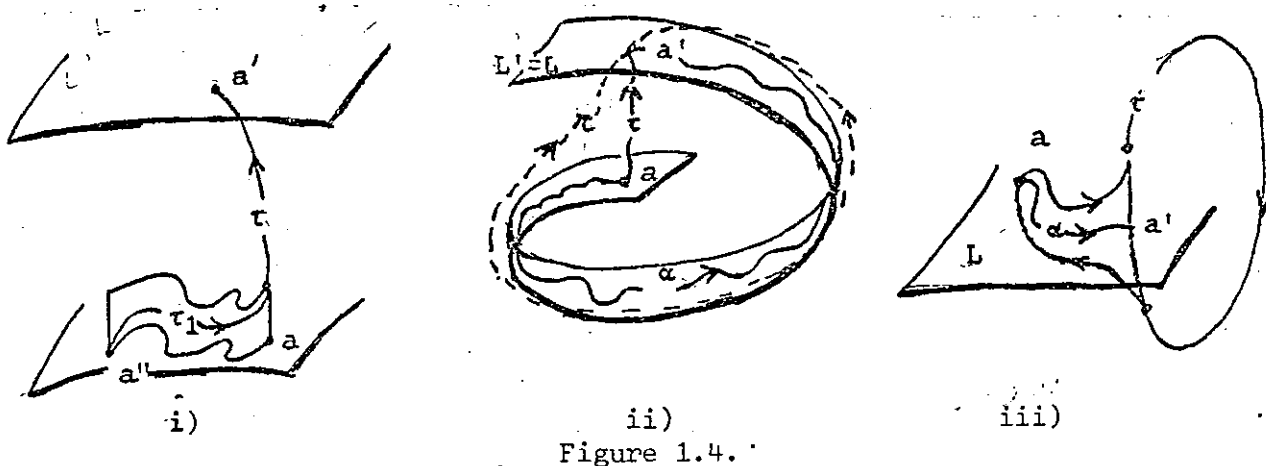


Figure 1.4.

ii) C'est une conséquence immédiate de i) en prenant le chemin  $\alpha^{-1}$  qui joint  $a'$  à  $a$ . (Figure 1.4. ii))

iii) Il suffit de répéter la construction de i) avec  $\alpha \cdot \tau$  et ensuite avec  $\alpha^{-1}$  du côté négatif. (Figure 1.4. iii))

De ce lemme on va déduire, avec les mêmes conditions sur  $\mathcal{F}$ , le corollaire suivant :

Corollaire 1.4. Si une transversale fermée  $\tau$  de  $\mathcal{F}$  est homotope, avec point base, à un lacet dans une feuille qu'elle coupe,  $\mathcal{F}$  possède un cycle évanouissant non trivial.

Démonstration : Supposons que  $\tau(0) = \tau(1) = a$  et que  $\tau$  est homotope, avec point base  $a$ , à un lacet  $\alpha$  dans la feuille  $L$  passant par  $a$ . En appliquant ii)

du lemme précédent, on obtient une transversale fermée homotope à  $\alpha^{-1} \cdot \tau$ , donc homotope à zéro. Le résultat est alors une conséquence du lemme 1.6 de [13].

Rappelons qu'une  $C^r$ -application  $H_0$  d'une surface  $V^2$  compacte dans  $M^n$  est en position générale relativement au feuilletage  $\mathcal{F}$  lorsque :

- les images des cercles constituant  $\partial V^2$  sont soit transverses à  $\mathcal{F}$ , soient des lacets dans des feuilles de  $\mathcal{F}$ .

- pour toute application distinguée de  $\mathcal{F}$ ,  $d : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $d \circ H_0$  est localement une fonction de Morse.

- Les points où  $H_0$  n'est pas transverse au feuilletage  $\mathcal{F}$  n'appartiennent pas à  $\partial V$  et en outre les images de deux de ces points par  $H$  ne sont pas sur une même feuille de  $\mathcal{F}$ .

Alors, l'image réciproque par  $H_0$  de  $\mathcal{F}$  est un feuilletage  $f$ , avec singularités, de  $V^2$ . Ces singularités sont des centres ou des cols et on peut supposer qu'il n'existe pas de trajectoire de  $f$  qui aboutisse à 2 cols distincts [5].

Si  $H$  est une  $C^r$ -application de  $V^2$  dans  $M^n$  telle que  $H/\partial V^2$  est transverse à  $\mathcal{F}$ , il existe une  $C^r$ -application  $H_0 : V^2 \rightarrow M^n$ , homotope à  $H$  relativement à  $\partial V^2$  [5] qui est en position générale relativement à  $\mathcal{F}$ . Toujours avec les mêmes hypothèses sur  $\mathcal{F}$ , on a le lemme suivant :

Lemme 2.4. : Soit  $H : S^1 \times I \rightarrow M^n$  une application différentiable telle que

i) Les applications  $\tau_i$  de  $S^1$  dans  $M^n$  (où  $i = 0, 1$ ) définies par  $\tau_i(\theta) = H(\theta, i)$  soient des transversales fermées positives.

ii) Le chemin  $c$  défini par  $c(t) = H(0, t)$  est dans la feuille  $L$  contenant  $a_i = \tau_i(0)$  ( $i = 0, 1$ ) et  $H$  est transverse à  $\mathcal{F}$  dans un voisinage de  $\{0\} \times I$ .

Alors, si  $\mathcal{F}$  ne possède pas de cycle évanouissant non trivial,  $\tau_0$  et  $\tau_1$  coupent les mêmes feuilles.

Démonstration : Il existe une  $C^r$ -application  $H_0$  de  $S^1 \times I$  dans  $M$ , en position générale par rapport à  $\mathcal{F}$  qui coïncide avec  $H$  dans un voisinage de  $S^1 \times \{0\} \cup S^1 \times \{1\} \cup \{0\} \times I$ . Soit  $f$ , le feuilletage, avec singularités, image réciproque de  $\mathcal{F}$  par  $H_0$ . Il est transverse à  $S^1 \times \{0\}$  et  $S^1 \times \{1\}$  et  $l_0 = \{0\} \times I$  est une feuille de  $f$ . On en déduit que tout cycle  $c$  de  $f$  (qui est soit une trajectoire fermée de  $f$ , soit la réunion d'un col et d'une trajectoire ouverte) est homotope à zéro dans  $S^1 \times I$ . Ainsi  $H_0 \circ c$  est un lacet dans une feuille  $L$  de  $\mathcal{F}$  qui est homotope à zéro dans la variété.  $\mathcal{F}$  ne possédant pas de cycles évanouissants non triviaux,  $H_0 \circ c$  est homotope à zéro dans la feuille qui le contient. [13].

Puisque  $l_0 = \{0\} \times I$  est une feuille de  $f$ ,  $f$  peut-être considéré comme un feuilletage de  $I \times I$  transverse à  $I \times \{0\}$  et  $I \times \{1\}$  et dont  $\{0\} \times I$  et  $\{1\} \times I$  sont des feuilles. Alors, le théorème de Bendixson-Poincaré permet d'affirmer que pour une trajectoire  $l$  qui coupe  $S^1 \times \{0\}$  quatre cas sont possibles (Figure 2.

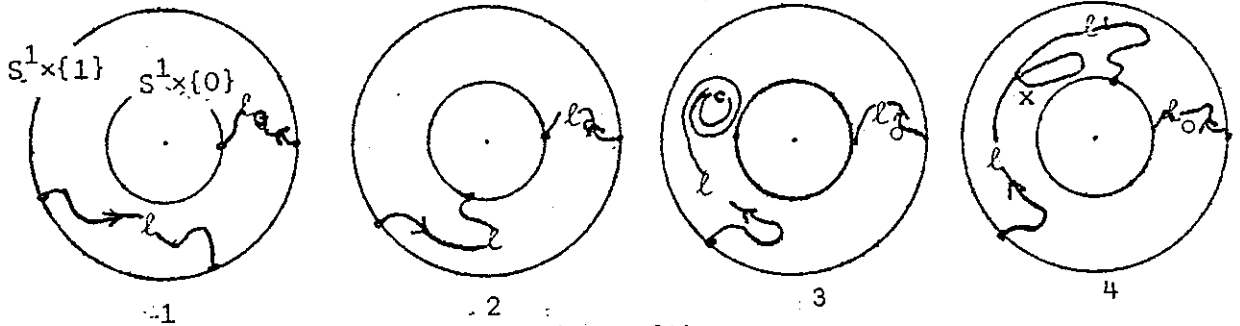


Figure 2.4.

- 1 -  $l$  coupe  $S^1 \times \{1\}$ .
- 2 -  $l$  recoupe  $S^1 \times \{0\}$  (en un point distinct du premier).
- 3 -  $l$  aboutit à un point de selle  $x (\in S^1 \times (0,1))$ .
- 4 -  $l$  s'enroule en spiralant autour d'un cycle  $c$  (décrit ci-dessus).

Dans les deux premiers cas,  $l$  est homéomorphe à  $[0,1]$ , dans les deux derniers,  $l$  est homéomorphe à  $[0,1)$ . Dans 4)  $H_0 \circ c$  est un lacet dans une feuille de  $\mathcal{F}$  auquel correspond un difféomorphisme local d'holonomie (positive ou négative

non nulle). Ainsi  $H_0 \circ c$  n'est pas homotope à zéro dans la feuille qui le contient. Ce cas est donc exclu d'après ce qui précède.

Il est possible de supposer que  $f$  est défini par un champ de vecteurs rentrant sur  $S^1 \times \{0\}$ . Les trajectoires de  $f$  sont alors orientées et le cas 2) est exclu.

Dans 3) il existe une trajectoire  $l'$  qui "sort" du point de selle  $x$  et qui ne revient pas se refermer sur lui. Les cas 2) et 4) sont exclus pour  $l'$ , pour les mêmes raisons que pour  $l$ . D'autre part 3) est aussi exclu puisque  $H_0$  est en position générale par rapport à  $\mathcal{F}$ . Ainsi  $l'$  coupe  $S^1 \times \{1\}$ . On en déduit que toute feuille de  $\mathcal{F}$  qui coupe  $\tau_0$  coupe  $\tau_1$ .

Théorème 1.4. Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage de classe  $r \geq 2$ , orientable, d'une variété  $M^n$  qui ne possède pas de cycle évanouissant non trivial. Alors, deux transversales fermées de  $\mathcal{F}$ , homotopes (avec point base), coupent les mêmes feuilles de  $\mathcal{F}$ .

Démonstration : Soient  $\tau_0$  et  $\tau'_1$  deux transversales fermées homotopes avec point base  $a$  et  $c$  un chemin (plongé) dans la feuille  $L$  passant par  $a$ , d'extrémité un point  $b$ . Soit  $\tau_1$  une transversale fermée homotope avec point base  $b$  à  $c^{-1} \cdot \tau'_1 \cdot c$  (construite par la méthode iii) du lemme 1.4). Alors, il existe une application  $H$  qui possède les propriétés i) et ii) du lemme précédent. ( $H$  est une homotopie qui relie  $\tau_0$  et  $\tau_1$ ). Puisque  $\tau'_1$  et  $\tau_1$  coupent les mêmes feuilles, il en est de même pour  $\tau_0$  et  $\tau'_1$  d'après le lemme précédent.

Remarque 1.4 : Les transversales fermées en un point  $a$  d'une feuille de  $\mathcal{F}$  permettent de définir un invariant de  $L$  même type que l'holonomie : on dit que deux transversales fermées positives  $\tau_0$  et  $\tau_1$  qui coupent  $L$  en  $a$  sont transversalement

homotopes s'il existe une application différentiable  $H : S^1 \times I \rightarrow M^n$ , telle que

- H est une homotopie, avec point base a, qui relie  $\tau_0$  et  $\tau_1$ .
- H n'est jamais tangente à une feuille de  $\mathcal{F}$ .

On définit ainsi sur l'ensemble des transversales positives qui passent par a une relation d'équivalence (plus fine que la relation d'homotopie entre lacets avec point base a). L'ensemble quotient  $T_a$  a une structure de monoïde pour la loi de composition déduite de la composition des lacets en a. On vérifie facilement, en appliquant le lemme 1.4. que si a' est un autre point de L, qu'un chemin  $\alpha$  qui joint a' à a, définit un isomorphisme de  $T_{a'}$  sur  $T_a$ . Ainsi le monoïde  $T_a$  est un invariant de la feuille L de  $\mathcal{F}$ . De plus  $\pi_1(L, a)$  opère sur  $T_a$  de la façon suivante :  $(\alpha, \dot{\tau}) \longrightarrow \alpha \cdot \tau \cdot \alpha^{-1}$  où  $\tau$  désigne une transversale fermée positive en a, et  $\dot{\tau}$  sa classe d'équivalence dans  $T_a$ .

Soit  $j_a : T_a \longrightarrow \pi_1(M, a)$ , l'application qui à  $\dot{\tau}$  appartenant à  $T_a$  associe la classe de  $\tau$  dans le groupe fondamental en a. En continuant la démonstration du lemme 2.4. on peut montrer que si la dimension de M est trois,  $j_a$  est un homomorphisme injectif lorsque  $\mathcal{F}$  ne possède pas de cycle évanouissant non trivial : en effet il suffit de montrer (avec les notations du lemme 2.4.) que l'on peut, par une homotopie différentiable, éliminer les singularités de  $H_0$ . Or, de la démonstration du lemme 2.4., résulte que tout centre de f est associé à un point de selle de telle façon qu'il forme avec lui un bon couple (voir [20] p.35) et il est possible d'éliminer ces bons couples. L'application obtenue après élimination des bons couples, est alors transverse à  $\mathcal{F}$ , ce qui démontre le résultat.

Rappelons une définition donnée par S.P. Novikov dans [13] pour un feuilletage de codimension 1, de classe  $r \geq 2$ , orienté, d'une variété compacte  $M^n$  :

deux points  $a$  et  $b$  de  $M^n$  sont équivalents si,  $L_a$  et  $L_b$  désignant les feuilles qui passent par ces points, il existe une transversale fermée de  $\mathcal{F}$  qui coupe  $L_a$  et  $L_b$  où si  $L_a = L_b$ . Une classe d'équivalence pour cette relation est une réunion de feuilles de  $\mathcal{F}$ . Puisque  $M^n$  est compacte toute feuille non compacte est incluse strictement dans une classe d'équivalence. D'autre part l'ensemble des feuilles coupées par une même transversale fermée étant un ouvert de  $M^n$ , on obtient la classification suivante des classes d'équivalence pour cette relation: la classe d'équivalence d'un point est soit :

- 1) une seule feuille de  $\mathcal{F}$ , cette feuille est alors compacte.
- 2) la variété  $M^n$ .
- 3) une sous-variété ouverte  $C$ , strictement incluse dans  $M^n$ .

Dans les cas 2 et 3, la classe d'équivalence est appelée une composante orientée du feuilletage. Pour distinguer 2 et 3 on dira dans le cas 2 que la composante orientée est triviale.

Dans ce dernier cas, l'adhérence  $\bar{C}$  de  $C$ , dans  $M$  est une variété à bord dont le bord est une réunion finie de feuilles compactes  $L_k$ ,  $k = 1, \dots, p$ . Ces feuilles ont une holonomie infinie, elles ne sont pas coupées par des transversales fermées et on déduit du lemme 1.3. qu'elles sont isolées dans l'ensemble des feuilles compactes de  $\mathcal{F}$  contenues dans  $C$ . La démonstration de la proposition suivante m'a été suggérée par S. Blanck.

Proposition 1.4. [13] *Soit  $C$  une composante orientée (triviale ou non) d'un feuilletage  $\mathcal{F}$ , de codimension 1, transversalement orientable, de classe  $r \geq 2$ , d'une variété compacte  $M^n$ . Il existe une transversale fermée de  $\mathcal{F}$  qui coupe toutes les feuilles de  $C$ .*

Démonstration : Si  $\tau$  est une transversale fermée de  $\mathcal{F}$ , notons  $\text{sat } \tau$  l'ensemble

des points des feuilles coupées par  $\tau$ .

1) Si  $C = M^n$  : Puisque  $M^n$  est compacte il existe un nombre fini  $\{\tau_i\}_{1 \leq i \leq p}$  de transversales fermées de  $\mathcal{F}$ , telles que  $\{\text{sat } \tau_i\}_{1 \leq i \leq p}$  soit un recouvrement ouvert de  $M^n$  ( $x \in \text{sat } \tau_i$  si  $L_x$  coupe  $\tau_i$ ).

2) Si  $C$  est non triviale : Soit  $L_0$  une feuille appartenant au bord  $\partial C$  de  $C$ .  $L_0$  étant isolée dans l'ensemble des feuilles compactes de  $C$ , on déduit du lemme 1.3. qu'il existe un voisinage collier ouvert de  $L_0$  dans  $\bar{C} \subset M^n$  tel qu'aucune feuille de  $C$  n'est contenue dans ce collier. Ainsi il existe un voisinage collier ouvert  $N$  de  $\partial C$  dans  $\bar{C}$  telle que  $\bar{C} - N$  coupe toutes les feuilles de  $C$ .  $\bar{C} - N$  étant compact, on peut trouver  $p$  transversales fermées  $\{\tau_i\}_{1 \leq i \leq p}$  telles que

$$\bar{C} - N \subset \bigcup_{1 \leq i \leq p} \text{sat } \tau_i = C$$

Dans les deux cas ( $M^n = C$  et  $M^n \neq C$ ) on peut ordonner les ouverts

$\{\text{sat } \tau_i\}_{1 \leq i \leq p}$  de telle façon que

$$\text{sat } \tau_i \cap \text{sat } \tau_{i+1} \neq \emptyset \quad \text{si } 1 \leq i \leq p-1$$

En utilisant le lemme 1.4, puisque  $\tau_1$  et  $\tau_2$  coupent une même feuille  $L$ , on peut construire une transversale fermée  $\tau_{1,2}$  telle que

$$\text{sat } \tau_{1,2} = \text{sat } \tau_1 \cup \text{sat } \tau_2.$$

En répétant cette construction au plus  $(p-1)$  fois on obtient une transversale fermée qui coupe toutes les feuilles de  $C$ .

### 5 - Feuilletages transverses au bord.

Ce paragraphe a pour but de montrer que ce qui précède (§ 2,3, 4) peut-être appliqué dans le cas où  $\mathcal{F}$  est un feuilletage de codimension 1, de classe  $r \geq 2$ , transversalement orientable, d'une variété compacte  $M^n$ , transverse à

$\partial M \neq \emptyset$  : c'est à dire qu'en un point  $a \in \partial M$ , il existe un voisinage  $V$  de  $a$  et un difféomorphisme  $h$  de  $V$  sur  $(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{n-2}) \times \mathbb{R}$  tel que pour tout  $x_n \in \mathbb{R}$ , l'image réciproque par  $h$  de  $(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{n-2}) \times \{x_n\}$  soit une plaque de la feuille passant par  $a$ . Ainsi,  $\partial M$  étant compact, il existe un voisinage collier de  $\partial M$  :

$$\phi : \partial M \times I \rightarrow M(\phi(a,0) = a \text{ si } a \in \partial M)$$

tel que, si  $\partial \mathcal{F}$  désigne le feuilletage induit par  $\mathcal{F}$  sur  $\partial M$ ,  $\partial \mathcal{F} \times I$  est l'image réciproque par  $\phi$  de  $\mathcal{F}$ .

On choisit sur  $M^n$  une métrique riemannienne pour laquelle une normale au  $(n-1)$  plan tangent en  $a \in \partial M$  soit située dans le  $(n-1)$  plan tangent à la feuille passant par  $a$ . On dit que, pour cette métrique, les feuilles sont normales au bord.

Le champ  $X$ , de vecteurs unitaires, normal au feuilletage, (qui oriente  $\mathcal{F}$ ) définit alors un flot différentiable  $\psi : M^n \times \mathbb{R} \rightarrow M^n$ .  $\mathcal{F}$  étant normal à  $\partial M$ , la restriction de  $\psi$  à  $\partial M$  est un flot  $\partial \psi : \partial M \times \mathbb{R} \rightarrow M^n$ . Les flots  $\psi$  et  $\partial \psi$  sont appelés respectivement les flots des normales à  $\mathcal{F}$  et à  $\partial \mathcal{F}$ .

On définit le double de  $2M$  de  $M$  en utilisant le collier défini par  $\phi$ . Alors sur  $2M$  existe un feuilletage unique  $2\mathcal{F}$ , de classe  $r$ , qui induit, sur les deux copies de  $M$  incluses dans  $2M$ , le feuilletage  $\mathcal{F}$ . On munit en outre  $2M$  de la métrique riemannienne qui, sur les deux copies de  $M(\subset 2M)$ , induit la métrique définie plus haut. Il existe un flot unique  $2\psi$  de normales à  $2\mathcal{F}$  dont la restriction à  $\overline{M(\subset 2M)}$  est  $\psi$ . Une feuille  $2L$  de  $2\mathcal{F}$  est naturellement le "double" d'une feuille  $L$  de  $\mathcal{F}$ .

Soit en  $a \in 2L$ ,  $2\varphi_a : \pi_1(2L, a) \rightarrow \mathcal{L}^r$  l'homomorphisme d'holonomie

de  $2\mathcal{F}$  (associé à la métrique définie plus haut). Désignons par  $\lambda_L : L \hookrightarrow 2L$  la restriction de l'injection  $\lambda : M \hookrightarrow 2M$  à une feuille  $L$  de  $\mathcal{F}$  on vérifie alors facilement ( puisque la topologie de la feuille n'intervient pas) que :

$$2\varphi_a \circ \lambda_{L\#} = \varphi_a : \pi_1(L,a) \rightarrow \mathcal{G}^r$$

est l'homomorphisme d'holonomie positive en  $a$  pour le feuilletage  $\mathcal{F}$ . Ainsi  $\lambda_{L\#}$  induit un homomorphisme  $\bar{\lambda}_L$  de  $G(L^+,a)$  dans  $G(2L^+,a)$ . Il est encore facile de vérifier que  $\bar{\lambda}_L$  est un isomorphisme et puisque les trajectoires de  $\psi$ , sont des trajectoires de  $2\psi$ , toutes les propriétés "de relèvement suivant les normales" vraies pour  $2\mathcal{F}$ , sont vraies pour  $\mathcal{F}$ . Ainsi les résultats énoncés dans les paragraphes précédents se transposent immédiatement dans le cas des feuilletages transverses au bord.

## II - Feuilletage sans holonomie.

Ce chapitre est décomposé en quatre paragraphes. Dans le premier il est rappelé deux théorèmes importants, l'un de R. Sacksteder [24], l'autre de D. Tischler [27]. Le premier nous permet de donner la définition d'un  $\mathcal{F}$ -flot associé à un feuilletage  $\mathcal{F}$  sans holonomie d'une variété compacte  $M^n$ . Quant au second, après l'avoir précisé, il nous permet de donner la définition d'une  $\mathcal{F}$ -fibration de  $M^n$  associée à  $\mathcal{F}$ .

Dans le paragraphe deux,  $M^n$  est une variété fermée et on montre essentiellement qu'une feuille d'un tel feuilletage  $\mathcal{F}$  est un revêtement de la fibre d'une certaine  $\mathcal{F}$ -fibration de  $M^n$  (théorème 1.2). Il est alors facile d'en déduire (corollaire 2.2) que, si  $M^n$ , possède un feuilletage par des plans  $\mathbb{R}^{n-1}$ ,  $M^n$  est homéomorphe à  $T^n$ , quel que soit  $n > 2$ .

Des résultats analogues sont montrés dans le paragraphe trois pour un feuilletage  $\mathcal{F}$ , sans holonomie, transverse au bord  $\partial M (\neq \emptyset)$ . On donne en particulier une condition nécessaire et suffisante (théorème 1.3) pour que l'intersection d'une feuille de  $\mathcal{F}$  avec une composante connexe de  $\partial M$  soit connexe. On en déduit qu'une variété feuilletée par des rubans  $\mathbb{R}^{n-2} \times I$ , est homéomorphe à  $T^{n-1} \times I$  pour  $n = 3$  et  $n \geq 6$ .

Dans le dernier paragraphe, partant d'une fibration de  $M^n$  sur  $S^1$ , on construit (théorème 1.4) des feuilletages  $\mathcal{F}$  de  $M^n$  pour lesquels cette fibration est une  $\mathcal{F}$ -fibration. Il est alors facile d'en déduire (corollaire 2.4) que, si  $H_1(M)$  n'a pas torsion, tout champ de  $(n-1)$  plans sur  $M^n$  est homotope à un champ de plans intégrable.

1. Rappels sur les feuilletages sans holonomie.

Dans ce paragraphe  $M^n$  désigne une variété compacte de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ) munie d'un feuilletage  $\mathcal{F}$  de classe  $r \geq 2$ , de codimension 1, transverse à  $\partial M$  si  $\partial M$  n'est pas vide. On dit que  $\mathcal{F}$  est sans holonomie si le groupe d'holonomie de chaque feuille de  $\mathcal{F}$  est trivial. En utilisant le revêtement à deux feuillets de  $M^n$  défini dans [4] on montre que  $\mathcal{F}$  est transversalement orientable.

Une classe importante de tels feuilletages  $\mathcal{F}$  est fournie par les feuilletages définis par une 1-forme fermée  $\omega$  qui ne s'annule en aucun point de  $M$ . Naturellement, dans le cas où  $M$  a un bord  $\partial M$ , la restriction de  $\omega$  à  $\partial M$  doit être une 1-forme fermée qui ne s'annule pas (elle définit le feuilletage  $\partial \mathcal{F} = \mathcal{F} / \partial M$ ). Dans [14] G.Reeb a montré que dans ces conditions, il est possible de choisir une métrique sur  $M^n$  pour laquelle le feuilletage est défini par une 1-forme fermée dont la norme en tout point est égale à un. D'autre part si  $\partial M \neq \emptyset$ , on peut aussi supposer que, pour cette métrique, le feuilletage est normal à  $\partial M$ . Soit alors  $X$  un champ de vecteurs normal à  $\mathcal{F}$ , unitaire (pour tout  $a$  de  $M^n$  on a  $\omega_a(X(a)) = 1$ ). On en déduit (voir [14]) que  $X$  définit un flot,

$$\psi : M \times \mathbb{R} \longrightarrow M, ((a,s) \longrightarrow \psi(a,s) = \psi_s(a))$$

tel que pour tout  $s \in \mathbb{R}$ ,  $\psi_s$  soit un difféomorphisme de  $M$  qui laisse globalement invariant le feuilletage  $\mathcal{F}$ .

Définition 1.1. Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage de codimension 1, de classe  $r \geq 2$  d'une variété  $M^n$ , normal à  $\partial M$  si  $\partial M \neq \emptyset$ . On appelle  $\mathcal{F}$ -flot tout flot  $\psi$  sur  $M$  de classe  $r' \geq 0$ , tel que :

i) Quel que soit  $a \in M$ ,  $\psi_a = \psi / \mathbb{R} \times \{a\}$  soit localement un homéomorphisme de  $\mathbb{R}$  sur un arc de la normale à  $\mathcal{F}$  passant par  $a$ .

ii) Quel que soit  $s \in \mathbb{R}$ ,  $\psi_s = \psi / (M \times \{s\})$  soit un homéomorphisme de  $M$  qui laisse globalement invariant  $\mathcal{F}$ .

Remarque 1.1. : Si  $\partial M$  n'est pas vide, puisque les feuilles de  $\mathcal{F}$  sont normales à  $\partial M$ , la restriction  $\partial\psi$  de  $\psi$  à  $\partial M$  est un  $\partial\mathcal{F}$ -flot ( $\partial\mathcal{F}$  désignant le feuilletage induit par  $\mathcal{F}$  sur  $\partial M$ ). Pour des raisons de connexité évidente, une trajectoire de  $\psi$  coupe toutes les feuilles de  $\mathcal{F}$ . (M étant supposée connexe).

Si  $\alpha$  est un lacet en un point  $a \in M$ , dans la feuille L passant par a,  $\psi_s \circ \alpha$  est le relèvement suivant les normales  $\alpha_s$  de  $\alpha$  de hauteur s. Ainsi tout feuilletage  $\mathcal{F}$  qui possède un  $\mathcal{F}$ -flot à une holonomie nulle. Réciproquement R.Sacksteder a démontré dans [24] le théorème suivant :

Théorème 1.1. Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage sans holonomie de classe  $r \geq 2$ , de codimension 1, d'une variété compacte  $M^n$ , normal à  $\partial M$  si  $\partial M \neq \emptyset$ . Alors,  $M^n$  étant considérée comme variété topologique, il existe sur  $M^n$  une structure différentiable  $S_{\mathcal{F}}$  de classe r telle que :

i)  $S_{\mathcal{F}}$  induit la même structure différentiable que la structure initiale sur les feuilles de  $\mathcal{F}$ .

ii) Il existe un  $\mathcal{F}$ -flot  $\psi$  sur M qui est de classe r si M est muni de la structure  $S_{\mathcal{F}}$ .

A la structure  $S_{\mathcal{F}}$  on peut associer une métrique riemannienne pour laquelle le  $\mathcal{F}$ -flot  $\psi$  est normal au feuilletage  $\mathcal{F}$  et unitaire. Ainsi,  $\mathcal{F}$  est aussi normal pour cette métrique à  $\partial M$  (si  $\partial M \neq \emptyset$ ). Soit, en un point a d'une feuille L de  $\mathcal{F}$ , une plaque  $P_a$ . Il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $\Psi(P_a \times (-\varepsilon, \varepsilon)) = U$  est un ouvert distingué de  $\mathcal{F}$  pour l'application

$$f : U \longrightarrow (-\varepsilon, \varepsilon) \quad \text{telle que} \quad f(\psi(x, s)) = s .$$

Ainsi, sur  $M^n$  munie de  $S_{\mathcal{F}}$ , le feuilletage  $\mathcal{F}$  est défini par une 1-forme fermée  $\omega$

qui s'écrit localement  $\omega = ds$  et si  $X$  désigne le champ de vecteur correspondant à  $\psi$ ,  $\omega_a(X(a)) = 1$  pour tout  $a \in M^n$ .

R.Sacksteder n'a démontré ce théorème que pour les variétés fermées. Mais, il se généralise facilement au cas des variétés à bord. En effet, sur le double  $2M$  de  $M$  correspond à  $\mathcal{F}$  un feuilletage  $2\mathcal{F}$  de même classe et qui est aussi sans holonomie (voir 5.I). Puisque les feuilles de  $2\mathcal{F}$  sont "normales" à  $\partial M \subset 2M$ , on peut définir la restriction  $\psi$ , d'un  $2\mathcal{F}$ -flot  $2\psi$  de  $2M$  à  $M^n$  et  $\psi$  est alors un  $\mathcal{F}$ -flot.

Remarque 1.2. De ce théorème on déduit que, si l'existence d'un feuilletage défini par une 1-forme fermée sur une variété compacte entraîne certaines propriétés topologiques, l'existence d'un feuilletage sans holonomie de même classe ( $r \geq 2$ ) implique les mêmes propriétés. Par contre, ce n'est plus vrai pour des propriétés liées à la structure différentiable. En effet, R.Roussarie dans [21] a donné un exemple de feuilletage analytique de  $T^2$  sans holonomie qui ne peut pas être défini par une 1-forme fermée : c'est à dire que l'application identique de  $T^2$ , n'est pas un difféomorphisme entre  $T^2$  muni de sa structure différentiable initiale et  $T^2$  muni d'une structure différentiable pour laquelle le feuilletage est défini par une 1-forme fermée.

Corollaire 1.1. [14] : Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage de classe  $r \geq 2$ , de codimension 1, sans holonomie d'une variété compacte  $M^n$ , (normal à  $\partial M$  si  $\partial M$  n'est pas vide). Alors, quels que soient la feuille  $L$  de  $\mathcal{F}$  et le point  $a$  de  $L$  :

i) L'injection  $i_L : L \hookrightarrow M$  induit un monomorphisme  $i_{L\#}$  de  $\pi_1(L,a)$  dans  $\pi_1(M,a)$  dont l'image contient le sous-groupe des commutateurs  $C(M,a)$  de  $\pi_1(M,a)$ .

ii) Il existe un homéomorphisme  $h$  du revêtement galaisien  $(\hat{M},q)$  de  $M$  associé

à  $i_{L\#}(\pi_1(L,a))$  sur  $L \times \mathbb{R}$  tel que,  $\hat{\mathcal{F}}$  et  $\hat{\psi}$  désignant les images réciproques de  $\mathcal{F}$  et  $\psi$  par  $q$  ( $\psi$  étant un  $\mathcal{F}$ -flot) :

- l'image par  $h$  d'une feuille de  $\hat{\mathcal{F}}$  est une sous-variété  $L \times \{s\} \subset L \times \mathbb{R}$ .
- la restriction de  $h$ , à une trajectoire  $\hat{\psi}_{\hat{x}}$  de  $\hat{\psi}$ , est un homéomorphisme sur  $\{h(\hat{x})\} \times \mathbb{R} \subset L \times \mathbb{R}$ .

Donnons quelques indications sur la démonstration. Il suffit de démontrer ces résultats pour un feuilletage défini par une 1-forme fermée.

Désignons par  $H_a$  le sousgroupe de  $\pi_1(M,a)$  formé des  $[\alpha] \in \pi_1(M,a)$  tels que

$$\int_{\alpha} \omega = 0 .$$

$H_a$  contient  $C(M,a)$  et  $i_{L\#}(\pi_1(L,a))$ . Ainsi à  $H_a$  est associé un revêtement galoisien  $(\hat{M},q)$  de  $M$  tel que :

-  $q^*(\omega) = df$ , où  $f$  est une application numérique sans point critique de classe  $r$ , définie sur  $\hat{M}$ .

- La restriction de  $q$  à la feuille  $\hat{L}$  de  $\hat{\mathcal{F}} = q^{-1}(\mathcal{F})$  passant par  $\hat{a} \in q^{-1}(a)$  est un difféomorphisme sur  $L$ .

Ainsi  $\hat{M}$  est difféomorphe à  $L \times \mathbb{R}$  et les feuilles de  $\hat{\mathcal{F}}$  sont les sous-variétés  $L \times \{s\}$  où  $s \in \mathbb{R}$ . On en déduit que  $i_{L\#}(\pi_1(L,a)) = H_a$  et dans la suite nous identifierons  $\pi_1(L,a)$  et son image  $H_a$  par  $i_{L\#}$ .

Corollaire 2.1. Soit  $\mathcal{F}$ , un feuilletage de classe  $r \geq 2$ , sans holonomie d'une variété compacte  $M^n$ , transverse à  $\partial M$  si  $\partial M \neq \emptyset$ . Alors quels que soient la feuille  $L$  de  $M$  et le point  $a$  de  $L$  :

i) un lacet en  $a$  est homotope à une transversale fermée de  $\mathcal{F}$  si et seulement si il représente un élément de  $\pi_1(M,a) - \pi_1(L,a)$ .

ii)  $\pi_1(M,a)/\pi_1(L,a)$  est abélien libre et  $H_1(M,z)$  est isomorphe à

$$(\pi_1(M,a)/\pi_1(L,a)) \oplus (\pi_1(L,a)/C(M,a))$$

Ce corollaire est démontré dans [17] lorsque les feuilles de  $\mathcal{F}$  sont simplement connexes.

Démonstration : Remarquons que les propriétés énoncées étant topologiques, il nous suffit de les montrer pour un feuilletage  $\mathcal{F}$  défini par une 1-forme fermée  $\omega$  de classe  $r$ . On suppose  $\|\omega\| = 1$ , et on désigne par  $\psi$  le  $\mathcal{F}$ -flot associé de classe  $r$ .

i) Soient  $L$  une feuille de  $\mathcal{F}$ ,  $a$  un point de  $L$  et  $\alpha$  un lacet en  $a$  :

- Si  $\int_{\alpha} \omega$  est nul,  $\alpha$  est d'après le corollaire précédent un élément de  $H_a = \pi_1(L, a)$ .

- Si  $\alpha$  est une transversale fermée positive (négative) de classe  $r$ ,  $\frac{d\alpha}{dt}(t)$  désignant le vecteur tangent à  $\alpha$  en  $\alpha(t)$ ,  $\omega(\frac{d\alpha}{dt}(t))$  est strictement positif (négatif) et

$$\int_{\alpha} \omega = \int_0^1 \omega\left(\frac{d\alpha}{dt}(t)\right) dt > 0 \text{ (resp. } < 0)$$

Ainsi  $\alpha$  n'appartient pas à  $\pi_1(L, a)$ .

Il nous suffit donc de montrer que si  $\int_{\alpha} \omega$  est positif,  $\alpha$  est homotope, avec point de base  $a$ , à une transversale fermée positive.

Soient  $(L \times \mathbb{R}, q)$  le revêtement de  $M^n$  construit dans le corollaire précédent,  $L_0 = L \times \{0\}$  la feuille de  $\hat{\mathcal{F}}$  qui passe par  $\hat{a} = (a, 0) \in q^{-1}(a)$ . Le relèvement  $\hat{\alpha}$  de  $\alpha$  pour  $q$ , d'origine  $\hat{a}$ , a pour extrémité un point  $(a', s_1) = \hat{a}'_1$ .

$$0 < \int_{\alpha} \omega = \int_{\hat{\alpha}} q^*(\omega) = f(\hat{a}'_1) - f(\hat{a}) = s_1 \quad (df = q^*(\omega))$$

Le chemin  $\hat{\tau}$  défini de la façon suivante est un segment de normale positif pour  $\hat{\mathcal{F}}$  :

$$\hat{\tau} : [0, 1] \longrightarrow L \times \mathbb{R}, \hat{\tau}(t) = (a, ts_1)$$

Soient  $\hat{a}'_1 = (a, s_1)$  son extrémité et  $\hat{\beta}_1$  un chemin dans  $L \times \{s_1\}$  qui joint  $\hat{a}'_1$  à  $\hat{a}'_1$ . Le lacet  $\hat{\tau} \cdot \hat{\beta}_1 \cdot \hat{\alpha}^{-1}$  est homotope avec point base  $\hat{a}$ , à un lacet  $\hat{\beta}$  dans  $L_0$ . Si  $\tau, \beta_1, \beta, a_1$  désignent respectivement les images par  $q$  de  $\hat{\tau}, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}, \hat{a}'_1$ , on en déduit immédiatement que  $\alpha$  est homotope, avec point de base  $a$ , au lacet  $\beta^{-1} \cdot \tau \cdot \beta_1$ . Or

$\tau$  est un segment de normale positif qui joint le point  $a$  au point  $a' \in L$  et  $\beta_1$  est un chemin dans  $L$  qui joint  $a'$  à  $a$ . Par déformation de  $\tau.\beta_1$  (voir lemme 1.4. I) on obtient une transversale fermée  $\tau'$ , homotope avec point base  $a$  à  $\tau.\beta_1$ . Par déformation de  $\beta^{-1}.\tau'$  (lemme 1.4.I) on obtient une transversale fermée  $\tau''$ , positive, homotope, avec point base  $a$ , au lacet  $\alpha$ .

ii) Puisque  $\pi_1(L,a)$  contient  $C(M,a)$ , il nous suffit de montrer que le groupe abélien de type fini  $\pi_1(M,a)/\pi_1(L,a)$  n'a pas de torsion. Soit  $\alpha$  un lacet en  $a$  représentant un élément de  $\pi_1(M,a) - \pi_1(L,a)$ .

$$\int_{\alpha} \omega \neq 0 \text{ et alors } \int_{\alpha^p} \omega \neq 0 \text{ pour tout } p \in \mathbb{Z}$$

On en déduit que, quel que soit  $p \in \mathbb{N}$ ,  $[\alpha]^p \notin \pi_1(L,a)$  et ainsi  $\pi_1(M,a)/\pi_1(L,a)$  n'a pas de torsion. Alors l'isomorphisme de la propriété ii) est une conséquence de la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow \pi_1(L,a)/C(M,a) \longrightarrow H_1(M) \longrightarrow \pi_1(M,a)/\pi_1(L,a) \longrightarrow 0$$

D. Tischler a montré dans [27] que si, sur une variété fermée il existe une 1-forme fermée de classe  $r$  qui ne s'annule jamais alors la variété est un  $C^r$ -fibré sur  $S^1$ . On peut préciser ce théorème par le théorème suivant :

Théorème 2.1. Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage de classe  $r \geq 2$ , de codimension 1, sans holonomie d'une variété compacte  $M^n$ , normal à  $\partial M$  si  $\partial M \neq \emptyset$ . Alors il existe une fibration  $(M,p)$  de  $M$  sur  $S^1$ , de fibre type  $F$ , telle que :

- i) Pour la structure différentiable  $S_{\mathcal{F},p}$ ,  $p$  est de classe  $r$ .
- ii) Quel que soit le point  $a$  de  $M$ ,  $\pi_1(F,a)$  étant identifié à un sous-groupe de  $\pi_1(M,a)$ ,  $\pi_1(L,a)$  est inclus dans  $\pi_1(F,a)$ .
- iii) Le  $\mathcal{F}$ -flot  $\psi$  est transverse aux fibres de cette fibration.

Dans la suite, on appelle  $\mathcal{F}$ -fibration une fibration  $(M,p)$  de  $M$  sur  $S^1$  qui possède les propriétés précédentes. Dans le cas, où  $\partial M$  n'est pas vide, la condition iii) implique que la restriction de  $p$  à  $\partial M$  est une  $\partial \mathcal{F}$ -fibration. Mais la fibre type de cette fibration  $\partial M \cap F$  n'est pas nécessairement connexe. Nous étudierons ce problème dans le paragraphe 3.

Démonstration : Il suffit naturellement de montrer ce théorème pour un feuilletage  $\mathcal{F}$  défini par une 1-forme fermée  $\omega$ , ( $\|\omega\| = 1$ ). Soient  $L$  une feuille de  $\mathcal{F}$  et  $a$  un point de  $L$ . Du corollaire précédent, on déduit qu'il existe :

- $q$  lacets en  $a$ ,  $\{\alpha_j\}_{1 \leq j \leq q}$ , dans  $L$
- $p$  transversales fermées en  $a$   $\{\tau_i\}_{1 \leq i \leq p}$ ,

tels que les classes, dans  $H_1(M, \mathbb{Z})$  de ces lacets engendrent la partie libre de  $H_1(M, \mathbb{Z})$ . Ainsi leurs classes dans  $H_1(M, \mathbb{R})$ ,  $\{\bar{\alpha}_j\}_{1 \leq j \leq q}$  et  $\{\bar{\tau}_i\}_{1 \leq i \leq p}$ , forment une base de cet espace vectoriel. On désigne par :

$$\{\bar{\alpha}_j^*\}_{1 \leq j \leq q} \cup \{\bar{\tau}_i^*\}_{1 \leq i \leq p}$$

la base duale correspondante qui peut-être identifiée à une base de  $H^1(M, \mathbb{R})$ .

Soient  $\tau_i^*$  et  $\alpha_j^*$ , des 1-formes de classe  $r$ , dont les classes de cohomologie correspondent respectivement à  $\bar{\tau}_i^*$  et  $\bar{\alpha}_j^*$  par l'isomorphisme classique. La forme  $\omega$  se décompose de la façon suivante :

$$\omega = \sum_{i=1}^p \lambda_i \tau_i^* + \sum_{j=1}^q \mu_j \alpha_j^* + dg$$

où  $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{R}$  et  $g : M^n \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $r$ . Puisque pour tout  $j = 1, 2, \dots, q$ ,

$\alpha_j$  est un lacet dans une feuille de  $\mathcal{F}$

$$0 = \int_{\alpha_j} \omega = \mu_j \int_{\alpha_j} \alpha_j^* = \mu_j \langle \bar{\alpha}_j^* \rangle, \quad \langle \bar{\alpha}_j^* \rangle = \mu_j$$

On obtient ainsi

$$\omega = \sum_{i=1}^p \lambda_i \tau_i^* + dg$$

Comme dans [27] on va construire une fibration associée à cette expression.  $\varepsilon \in (0,1)$  étant donné, il existe  $p+1$  entiers  $\{n_i\}_{1 \leq i \leq p}$  premiers entre eux et  $d$  tels que si

$$\Omega = \sum_{i=1}^p n_i \tau_i^* + dg \text{ alors } \left\| \omega - \frac{\Omega}{d} \right\| < \varepsilon$$

Puisque  $\|\Omega\| > (1-\varepsilon)d$ ,  $\Omega$  est une 1-forme de fermée qui ne s'annule pas et le  $\mathcal{F}$ -flot  $\psi$  est transverse au feuilletage défini par cette forme. ( $\varepsilon$  étant choisi suffisamment petit). Désignons par  $d\theta$  la 1-forme de classe  $r$  de  $S^1$  qui correspond à  $1 \in H^1(S^1, \mathbb{R})$ , on montre facilement qu'il existe  $p$  applications  $f_i$  de  $M$  sur  $S^1$ , de classe  $r$ , telles que  $f_i^*(d\theta)$  et  $\tau_i^*$  soient des cocycles équivalents. Si  $p = \prod_{i=1}^p n_i$ , alors  $\Omega = p^*(d\theta)$  et  $p$  est une fibration de  $M$  sur  $S^1$  de classe  $r$  dont la fibre est connexe puisque les  $n_i$  sont premiers entre eux et elle possède la propriété iii). Montrons que  $(M,p)$  vérifie ii). Soit  $\alpha$  un lacet en  $a$  dans  $L$ ,  $\alpha$  sa classe dans  $H_1(M, \mathbb{R})$ .

$$\int_{p\circ\alpha} d\theta = \int_{\alpha} p^*(d\theta) = \sum_{i=1}^p n_i \int_{\alpha} \tau_i^* = \sum_{i=1}^p n_i \langle \bar{\tau}_i^*, \alpha \rangle$$

Or, quel que soit  $i(1 \leq i \leq p)$ ,  $\bar{\tau}_i^*$  est orthogonal à  $(\pi_1(L,a)/C(M,a)) \otimes \mathbb{R}$ . Ainsi l'intégrale précédente est nulle;  $p\circ\alpha$  est donc homotope à zéro et  $\alpha$  représente un élément de  $\pi_1(F,a) \subset \pi_1(M,a)$ .

## 2. Feuilletages sans holonomie des variétés fermées.

Nous pourrions poursuivre simultanément l'étude des feuilletages sans holonomie des variétés fermées et des variétés à bord. Mais, il sera plus simple, en passant au double, d'obtenir des résultats sur les variétés à bord, à partir

de propriétés démontrées sur les variétés fermées.

Théorème 1.2. Soient  $\mathcal{F}$  un feuilletage sans holonomie, de codimension 1, de classe  $r \geq 2$ , d'une variété fermée  $M^n, (M, p)$  une  $\mathcal{F}$ -fibration de fibre de type  $F$  connexe,  $L$  une feuille de  $\mathcal{F}$  et  $a$  un point de  $L$ . Alors,  $L$  est un revêtement de la fibre  $F$  dont le groupe des automorphismes est abélien libre et isomorphe au groupe quotient  $\pi_1(F, a) / \pi_1(L, a)$ , obtenu à partir des inclusions suivantes :

$$\pi_1(L, a) \subset \pi_1(F, a) \subset \pi_1(M, a)$$

La démonstration de ce théorème nécessite les lemmes suivants qui précisent en outre la signification géométrique de l'application de revêtement  $L \rightarrow F$ . Les hypothèses et notations sont les mêmes que dans l'énoncé du théorème.

Lemme 1.2. Soient  $(\hat{M} = F \times \mathbb{R}, q)$  le revêtement infini cyclique associé à  $(M, p)$ ,  $\hat{\mathcal{F}}$  et  $\hat{\psi}$  les images réciproques par  $q$  de  $\mathcal{F}$  et du  $\mathcal{F}$ -flot  $\psi$  (transverse aux fibres de  $(M, p)$ ). Alors les trajectoires de  $\hat{\psi}$  sont transverses aux sous-variétés  $F \times \{t\} \subset \hat{M}$  et coupent chacune d'elles en un point et un seul.

Ainsi on peut définir une application  $n$  de  $\hat{M}$  sur  $F_0 = F \times \{0\}$  qui à  $\hat{x} \in \hat{M}$  associe le point d'intersection  $\hat{x}_0$  de  $\hat{\psi}_{\hat{x}}(\mathbb{R})$  avec  $F_0$ .

Lemme 2.2. La restriction  $n_L$  de  $n$  à une feuille  $\hat{L}$  de  $\hat{\mathcal{F}}$  est un revêtement de  $F_0$ .

Pour démontrer ces différents résultats, on peut supposer que le feuilletage  $\mathcal{F}$  est défini par une 1-forme  $\omega$  ( $\|\omega\| = 1$ ) et que  $\psi$  est alors un  $\mathcal{F}$ -flot de classe  $r$ , unitaire ( $\omega(\frac{\partial \psi}{\partial s}) = 1$ ). Dans ces conditions  $(M, p)$  est une  $\mathcal{F}$ -fibration de classe  $r$ .

Démonstration du lemme 1.2. Puisque  $(M,p)$  est de classe  $r$ , le revêtement infini cyclique  $(\hat{M},q)$  est une application de même classe. Le feuilletage  $\hat{\mathcal{F}}$  et le flot  $\hat{\psi}$ , images réciproques respectives de  $\mathcal{F}$  et  $\psi$  par  $q$ , sont aussi de classe  $r$ . On munit  $\hat{M}$  de la métrique riemannienne image réciproque de la métrique de  $M$  par  $q$ ;  $\hat{\psi}$  est alors le flot défini par le champ de vecteurs  $q_*^{-1}(X) = \hat{X}$ , normal à  $\hat{\mathcal{F}}$  et unitaire.

$$\hat{\psi} : \hat{M} \times \mathbb{R} \longrightarrow \hat{M}, (\hat{x},s) \longrightarrow \hat{\psi}(\hat{x},s) = \hat{\psi}_{\hat{x}}(s)$$

Soient alors :

$$g : \hat{M} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, g(\hat{x},s) = p_2(\hat{\psi}(\hat{x},s)) \text{ et } g_{\hat{x}} = g|_{\{\hat{x}\} \times \mathbb{R}}$$

où  $p_2$  désigne la projection de  $\hat{M} = \hat{F} \times \mathbb{R}$  sur le facteur  $\mathbb{R}$ . Si  $\vec{i}$  est le champ de vecteurs unitaires canonique de  $\mathbb{R}$ , on a la relation

$$(\vec{i} \cdot \frac{d}{ds} g_{\hat{x}}(s)) \vec{i} = p_{2*}(\hat{X}(\hat{\psi}(\hat{x},s))).$$

Puisque  $\psi$  est un flot transverse aux fibres de  $(M,p)$ ,  $\hat{\psi}$  est transverse au facteur  $F$  de  $\hat{M} = F \times \mathbb{R}$ . Ainsi quel que soit  $\hat{x} \in \hat{M}$ ,  $p_{2*}(\hat{X})$  n'est jamais le vecteur nul, de plus  $\hat{M}$  est un revêtement infini cyclique et ainsi

$$\inf_{\hat{x} \in \hat{M}} |p_{2*}(\hat{X}(\hat{x}))| = \inf_{\hat{x} \in F \times [0,1]} |p_{2*}(\hat{X}(\hat{x}))| \geq \lambda > 0$$

On en déduit que

$$\frac{d}{ds}(g_{\hat{x}}(s)) \gg \lambda > 0$$

Ainsi l'application  $g_{\hat{x}}$  est un difféomorphisme de  $\mathbb{R}$  et  $\hat{\psi}_{\hat{x}}(\mathbb{R})$  coupe toutes les sous-variétés  $F \times \{t\}$  de  $\hat{M}$  une fois et une seule. A chaque point  $\hat{x} \in M$ , correspond  $s_{\hat{x}}$  unique tel que :

$$g_{\hat{x}}(s_{\hat{x}}) = g(\hat{x},s_{\hat{x}}) = 0.$$

De plus la projection suivante est de classe  $r$  :

$$n : \hat{M} \longrightarrow F_0 = F \times \{0\}, n(\hat{x}) = \psi(\hat{x},s_{\hat{x}}) = \psi_{\hat{x}}(\mathbb{R}) \cap F_0.$$

Démonstration du lemme 2.2. Soit  $n_{\uparrow}$  la restriction de  $n$  à une feuille  $\hat{L}$  de  $\hat{\mathcal{F}}$ .

On va définir un recouvrement de  $F_0$  par des ouverts qui seront des "ouverts normaux" pour  $n_L^\wedge$ . Soit  $f : W_{\hat{x}_0} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ , une carte distinguée en  $\hat{x}_0 \in F_0$  telle que :

- $f^{-1}(\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1})$  est une plaque  $P_{\hat{x}_0}$  de la feuille  $L_{\hat{x}_0}$  passant par  $\hat{x}_0$ .
- en un point  $\hat{x}'_0 \in P_{\hat{x}_0}$ , l'arc de normale passant par  $\hat{x}'_0$  soit  $f^{-1}(\mathbb{R} \times \{p_2(f(\hat{x}'_0))\})$  où  $p_2$  désigne la projection de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$  sur  $\mathbb{R}^{n-1}$ .

Désignons par  $V_{\hat{x}_0}$  la composante connexe de  $F_0 \cap W_{\hat{x}_0}$  qui contient  $\hat{x}_0$ . Puisque  $F_0$  est transverse au flot des normales  $\psi$ ,  $p_2 \circ f$  applique difféomorphiquement  $V_{\hat{x}_0}$  sur un ouvert connexe de  $\mathbb{R}^{n-1}$  contenant zéro. Ainsi l'application  $f^{-1} \circ p_2 \circ f / V_{\hat{x}_0}$  est un difféomorphisme de  $V_{\hat{x}_0}$  sur un ouvert  $U_{\hat{x}_0}$  de  $P_{\hat{x}_0}$ . L'inverse de cette application est évidemment la restriction  $n/U_{\hat{x}_0}$ .

Désignons par  $\{\hat{x}_i\}_{i \in I}$  l'image réciproque de  $\hat{x}_0$  par  $n_L^\wedge$ . A chaque  $\hat{x}_i$  est associé  $\{s_{\hat{x}_i}\}_{i \in I}$  tel que  $n(\hat{x}_i) = \hat{\psi}(\hat{x}_i, s_{\hat{x}_i})$ . Puisque  $\psi$  laisse globalement invariant  $\hat{\mathcal{F}}$ ,  $\hat{x}'$  appartient à  $n_L^{-1}(V_{\hat{x}_0})$  si et seulement s'il existe  $i \in I$  tel que  $\hat{\psi}(\hat{x}'_i, s_{\hat{x}_i})$  appartient à  $U_{\hat{x}_0}$ . On en déduit que

$$n_L^{-1}(V_{\hat{x}_0}) = n_L^{-1}(n(U_{\hat{x}_0})) = \bigcup_{i \in I} \hat{\psi}(U_{\hat{x}_0}, s_{\hat{x}_i})$$

Les ouverts de cette union étant disjoints et difféomorphes à  $U_{\hat{x}_0}$ , donc à  $V_{\hat{x}_0}$ , ceci achève la démonstration.

Démonstration du théorème 1.2. Soit  $L$  une feuille de  $\hat{\mathcal{F}}$  et  $a$  un point de  $L$ . On peut toujours supposer qu'il existe  $\hat{a} \in q^{-1}(a)$  tel que  $\hat{a} = (a, 0)$  et soit  $\hat{L}$  la feuille de  $\hat{\mathcal{F}}$  qui passe par  $\hat{a}$ . Identifions  $\pi_1(F_0, \hat{a})$  avec  $\pi_1(\hat{M}, \hat{a})$ .  $[\hat{\alpha}]$  est un élément de  $n_{L^\#}(\pi_1(\hat{L}, \hat{a}))$  si et seulement si  $[\hat{\alpha}]$  appartient à  $i_{L^\#}(\pi_1(\hat{L}, \hat{a}))$ , d'après la construction même de  $n_L^\wedge$ . D'autre part,  $L$  désignant la projection par  $q$  de  $\hat{L}$ , puisque

$$\pi_1(L, a) \subset \pi_1(F, a) = \text{Im } q_\#$$

la restriction de  $q$  à  $\hat{L}$  est un difféomorphisme. Ainsi  $n_L = n_{\hat{L}} \circ q^{-1}/L$  est un revêtement galoisien de la fibre type  $F$  dont le groupe des automorphismes est isomorphe à

$$\pi_1(F_0, \hat{a}) / i_{L\#}(\pi_1(\hat{L}, \hat{a})) \simeq \pi_1(F, a) / \pi_1(L, a).$$

Puisque  $\pi_1(M, a) / \pi_1(L, a)$  est abélien libre, il en est de même pour le groupe des automorphismes de  $n_L : L \rightarrow F$ .

Remarque 1.2. On en déduit très facilement de ce théorème que si  $\pi_1(M, a) / \pi_1(L, a) = \mathbb{Z}^p$  pour

-  $p = 1$ , le feuilletage  $\mathcal{F}$  est une fibration.

-  $p = 2$ , les feuilles de  $\mathcal{F}$  sont denses dans  $M$  et les feuilles de  $\hat{\mathcal{F}}$  sont fermées.

-  $p \geq 3$ , les feuilles de  $\mathcal{F}$  et de  $\hat{\mathcal{F}}$  sont respectivement denses dans  $M$  et  $\hat{M}$ .

Corollaire 1.2. Si  $M^n$  est une variété homéomorphe à  $T^n$ , pour  $n \geq 6$  ou  $n = 3$ , les feuilles d'un feuilletage sans holonomie, de classe  $r \geq 2$ , de codimension 1, de  $M$  sont toutes homéomorphes à  $T^{n-p} \times \mathbb{R}^{p-1}$  où  $1 \leq p \leq n$ .

Avant de démontrer ce corollaire, rappelons tout d'abord un résultat de C.T.C. WALL que nous allons utiliser très souvent :

Théorème de Wall [29]: Une variété compacte  $M^n$  de dimension  $n \geq 5$  qui a le type d'homotopie d'un tore  $T^n$  est homéomorphe à  $T^n$ .

Démonstration du corollaire 1.2. Le résultat est évident, pour  $n = 3$ . Supposons  $n \geq 6$ . Soit  $F$  la fibre d'une  $\mathcal{F}$ -fibration. De la suite exacte d'homotopie :

$$\pi_{k+1}(S^1) \longrightarrow \pi_k(F) \longrightarrow \pi_k(M) \longrightarrow \pi_k(S^1)$$

on déduit que  $\pi_k(F) = 0$  si  $k \geq 2$  et  $\pi_1(F) = \mathbb{Z}^{n-1}$ . Ainsi  $F$  est homéomorphe à  $T^{n-1}$ .  
 $L$  qui en est un revêtement est homéomorphe à  $T^{n-p} \times \mathbb{R}^p$ .

Corollaire 2.2. Si  $\mathcal{F}$  est un feuilletage de classe  $r \geq 2$ , d'une variété compacte  $M^n$  dont les feuilles sont difféomorphes à  $\mathbb{R}^{n-1}$ ,  $M^n$  est homéomorphe à  $T^n$ .

Quel que soit  $n$ , d'après les corollaires 1 et 2 du théorème 2.1,  $M^n$  admet  $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$  pour revêtement et  $\pi_1(M^n)$  est abélien libre.  $M^n$  est un tore d'homotopie de dimension  $n$  et ainsi  $M^n$  est homéomorphe à  $T^n$  pour  $n \geq 5$ . Pour  $n = 3$ , H. Rosenberg a démontré ce résultat dans [17]. La démonstration pour  $n = 4$  nécessite le lemme suivant :

Lemme 3.2. [17] Si  $M^n$  est une variété dont le groupe fondamental est abélien, fibrée sur  $S^1$ , de fibre homéomorphe à  $T^{n-1}$ , pour  $n = 3, 4$ ,  $M^n$  est homéomorphe à  $T^n$ .

Démonstration : Définissons  $M^n$  comme le quotient de  $\hat{M} = T^{n-1} \times \mathbb{R}$  par la relation  $(f(x), t+1) \sim (x, t)$  où  $f$  est un homéomorphisme de  $T^{n-1}$ . Soit  $(\hat{M}, q)$  le revêtement infini cyclique de la fibration. A ce revêtement est associé l'automorphisme  $\tilde{f}$ ,

$$\tilde{f}(x, t) = (f(x), t+1).$$

Soient  $a$  un point de  $M^n$ ,  $\hat{a} = (a, 0)$  un point de  $q^{-1}(a)$ . On identifie  $T^{n-1}$  à la fibre en  $a$ ,  $\pi_1(T^{n-1}, a)$  à son image dans  $\pi_1(M^n, a)$  ainsi que  $\pi_1(\hat{M}, \hat{a})$  et  $\pi_1(T_0^{n-1}, \hat{a})$  (si  $T^{n-1} \times \{0\} = T_0^{n-1}$ ). On peut toujours supposer (à une isotopie près) que  $f(a) = a$ .

Soit,  $\hat{\alpha} : [0, 1] \rightarrow \hat{M}$ , le chemin dans  $\hat{M}$  défini par  $\hat{\alpha}(t) = (a, t)$  et soit  $\alpha = q \circ \hat{\alpha}$  sa projection par  $q$ . Désignons par  $\{\alpha_i\}_{1 \leq i \leq n-1}$  les générateurs de

$\pi_1(T^{n-1}, a)$  et par  $\{\hat{\alpha}_k\}_{1 \leq k \leq n-1}$  les générateurs correspondants de  $\pi_1(T_0^{n-1}, \hat{a})$ .

On vérifie facilement que les lacets  $\hat{\alpha} \cdot f(\hat{\alpha}_k) \cdot \hat{\alpha}^{-1}$  et  $\hat{\alpha}_k$  sont homotopes, avec point de base  $\hat{a}$ . En prenant l'image par  $q$  de cette relation on a :

$$[\alpha]^{-1} \cdot [\alpha_k] \cdot [\alpha]^{-1} = f_{\#}([\alpha_k]).$$

$\pi_1(M^n, a)$  étant abélien,  $f_{\#}$  est l'application identique de  $\pi_1(T^{n-1}, a)$ . Alors, d'après un théorème de [28]  $f$  est isotope à l'identité pour  $n = 3, 4$ .

Démonstration du corollaire 2.2. pour  $n = 4$ . Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage de  $M^4$  de classe  $r \geq 2$ , par des plans  $\mathbb{R}^3$  (c'est donc un feuilletage sans holonomie). Des résultats précédents on déduit que :

- 1)  $\pi_1(M^4)$  est abélien libre.
- 2)  $M^4$  est un fibré sur  $S^1$  (topologique) de fibre  $F^3$  connexe.
- 3)  $F^3$  a pour revêtement  $\mathbb{R}^3$ .

Alors 1) implique que  $\pi_1(F)$  est abélien libre et 3) que  $F$  est irréductible. D'un théorème de Stallings [26], résulte alors que  $F$  est un fibré sur  $S^1$ , de fibre une surface  $T$ . Puisque  $\pi_1(T) \subset \pi_1(F)$  est abélien libre,  $T$  est homéomorphe à  $T^2$  ou à  $S^2$ .  $F^3$  ayant pour revêtement universel  $\mathbb{R}^3$ ,  $T$  est homéomorphe à  $T^2$ . Le lemme précédent implique que  $F^3$  est homéomorphe à  $T^3$  et ensuite que  $M^4$  est homéomorphe à  $T^4$ .

Remarque 2.2. Après ce corollaire on peut se poser la question suivante. La variété  $M^n$  est-elle difféomorphe à un tore pour la structure  $S_{\mathcal{F}}$  définie dans le théorème 1.1. Nous apporterons une réponse négative à cette question pour  $n \geq 6$  dans le paragraphe 4.

3. Feuilletages sans holonomie des variétés à bord, transverses au bord.

Nous allons tout d'abord démontrer 2 lemmes avant d'aborder la démonstration du théorème suivant :

Théorème 1.3. Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage sans holonomie de classe  $r \geq 2$ , de codimension 1, d'une variété compacte à bord  $\partial M$ , transverse à  $\partial M$ . Il existe une  $\mathcal{F}$ -fibration  $(M, p)$  de fibre type  $F$  connexe telle que :

i) Quel que soit le point  $a$  de  $M$ , la feuille  $L$  passant par  $a$  est un revêtement galoisien de  $F$  dont le groupe des automorphismes est abélien libre et isomorphe au groupe quotient  $\pi_1(F, a) / \pi_1(L, a)$  (indépendant de  $L$ ) obtenu à partir des inclusions :

$$\pi_1(L, a) \subset \pi_1(F, a) \subset \pi_1(M, a).$$

ii) Si  $N$  est une composante connexe de  $\partial M$

a)  $(M, p)$  induit sur  $N$  une  $\mathcal{F}_N$ -fibration.

b) Toutes les feuilles de  $\mathcal{F}$  ont des intersections difféomorphes avec  $N$ .

c)  $L$  et  $l$  étant respectivement les feuilles de  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}_N$ , en un point  $a$  de  $N$ , la trace de  $L$  sur  $N$  est formée de la seule feuille  $l$  si et seulement si l'inclusion  $i : N \hookrightarrow M$  induit un isomorphisme de  $\pi_1(N, a) / \pi_1(l, a)$  sur  $\pi_1(M, a) / \pi_1(L, a)$ .

La condition ii) c) est vérifiée dès que l'injection  $i : N \hookrightarrow M$  induit une surjection  $i_* : H_1(N) \rightarrow H_1(M)$ . Le corollaire suivant est une conséquence de cette remarque.

Corollaire 1.3. Lorsque les feuilles de  $\mathcal{F}$  et de  $\mathcal{F}_N$  sont simplement connexes, la trace d'une feuille  $L$  de  $\mathcal{F}$  sur  $N$  est une feuille  $l$  de  $\mathcal{F}_N$  si et seulement si  $i : N \hookrightarrow M$  induit un isomorphisme des groupes fondamentaux.

Cette condition est encore équivalente à  $i_* : H_1(N) \longrightarrow H_1(M)$  est un isomorphisme puisque les groupes fondamentaux sont abéliens libres (corollaire 2.1)

Lemme 1.3. Soient  $\mathcal{F}$  un feuilletage de classe  $r \geq 2$ , de codimension 1, sans holonomie d'une variété fermée  $M^n$ ,  $N^p$  une sous-variété fermée de  $M$  connexe, transverse à  $\mathcal{F}$ . Alors il existe une  $\mathcal{F}$ -fibration  $(M, p)$  de  $M$  sur  $S^1$  qui induit une  $\mathcal{F}_N$ -fibration  $(N, p_N)$ ,  $\mathcal{F}_N$  désignant le feuilletage induit par  $\mathcal{F}$  sur  $N$ .

Démonstration : Il suffit de montrer ce lemme pour un feuilletage  $\mathcal{F}$  défini par une 1-forme fermée. On choisit sur  $M$  une métrique riemannienne pour laquelle les feuilles de  $\mathcal{F}$  sont normales à  $N$ . Soit alors  $\omega$  une 1-forme de norme 1 qui définit  $\mathcal{F}$  et soit  $\psi$  le  $\mathcal{F}$ -flot associé.

Si  $i : N \hookrightarrow M$  est l'injection de  $N$  dans  $M$ , la 1-forme  $i^*(\omega) = \omega_N$  définit le feuilletage  $\mathcal{F}_N$ , induit par  $\mathcal{F}$  sur  $N$ , et  $\psi/N \times \mathbb{R}$  est un  $\mathcal{F}_N$ -flot. Puisque une 1-forme  $\Omega$  qui définit une  $\mathcal{F}$ -fibration  $(M, p)$  est aussi proche qu'on le désire de  $\omega$ , on peut la choisir de telle façon que  $i^*(\Omega) = \Omega_N$  ne s'annule pas. Ainsi la restriction de  $p$  à  $N$ ,  $p_N$ , est une fibration.

Elle vérifie (comme  $p$ ) les conditions i) et iii) d'une  $\mathcal{F}_N$ -fibration. Montrons qu'elle satisfait à la propriété ii). Soient  $a$  un point de  $N$ ,  $L$  et  $\ell$  respectivement les feuilles de  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}_N$  qui passent par ce point. En identifiant  $\pi_1(\ell, a)$  et  $\pi_1(F \cap N, a)$  à des sous-groupes de  $\pi_1(N, a)$  on obtient l'inclusion suivante :

$$\pi_1(\ell, a) \subset i_{\#}^{-1}(\pi_1(L, a)) \subset i_{\#}^{-1}(\pi_1(F, a)) \subset \pi_1(F \cap N, a).$$

Avec les mêmes hypothèses on a le lemme suivant :

Lemme 2.3. Toutes les feuilles de  $\mathcal{F}$  ont des intersections difféomorphes avec  $N$  et l'intersection d'une feuille  $L$  passant par un point  $a$  de  $N$  est une feuille (unique) de  $\mathcal{F}_N$  si et seulement si le plongement  $i : N \hookrightarrow M$  induit un isomorphisme de  $\pi_1(N, a) / \pi_1(L, a)$  sur  $\pi_1(M, a) / \pi_1(L, a)$ .

Démonstration : La première affirmation est une conséquence immédiate du fait que  $\psi$  induit un  $\mathcal{F}_N$ -flot,  $\psi_N$ , sur  $N$ . D'autre part puisque  $i_{\#}(\pi_1(L, a)) \subset \pi_1(L, a)$   $i$  induit un homomorphisme  $i_{\#}$  de  $\pi_1(N, a) / \pi_1(L, a)$ , dans  $\pi_1(M, a) / \pi_1(L, a)$ . Un élément  $\bar{\tau}$  de  $\pi_1(N, a) / \pi_1(L, a)$  étant représentable par une transversale fermée  $\tau$  de  $\mathcal{F}_N$ , son image  $i_{\#}(\bar{\tau})$  est représentable par la transversale fermée  $i_0\tau$  de  $\mathcal{F}$  et ainsi  $i_{\#}$  est injective.

Désignons par  $\{f_k\}_{1 \leq k \leq m}$  les composantes connexes de  $F \cap N$ . A la fibration  $p/N = p_N$  est associée la suite exacte

$$0 \longrightarrow \pi_1(F \cap N, a) \longrightarrow \pi_1(N, a) \xrightarrow{p_{N\#}} \pi_1(S^1) = \mathbb{Z} \longrightarrow \pi_0(F \cap N) \longrightarrow 0$$

On en déduit,  $F \cap N$  ayant  $m$  composantes connexes que

$$p_{N\#}(\pi_1(N, a)) = m\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} = p_{\#}(\pi_1(M, a))$$

Dans la suite de cette démonstration nous utilisons les notations du lemme 2.2 :

$(\hat{M}, q)$  est le revêtement infini cyclique associé à  $p$ ,  $F_0 = F \times \{0\}$ ,  $\hat{a} = (a, 0)$ ,  $\hat{L}$  la feuille qui passe par  $\hat{a}$  et  $n_{\hat{L}}$  la projection de  $\hat{L}$  sur  $F_0$  suivant les trajectoires de  $\hat{\psi}$ . Puisque  $q/\hat{L}$  est un difféomorphisme sur  $L$ ,  $\hat{L} \cap q^{-1}(N)$  et  $L \cap N$  sont difféomorphes. Par définition de  $n_{\hat{L}}$ , la restriction  $n_{\hat{L}}/\hat{L} \cap q^{-1}(N)$  est un revêtement de  $F_0 \cap q^{-1}(N)$  et ainsi

$$n_{\hat{L}}^{-1} \left( \bigcup_{k=1}^m f_k \times \{0\} \right) = \hat{L} \cap q^{-1}(N)$$

On en déduit que  $L \cap N$  est connexe si et seulement si

1)  $F_0 \cap q^{-1}(N)$  est connexe, c'est à dire  $m = 1$  ( $F \cap N = f$ ).

2)  $j_0$  désignant l'inclusion de  $f \times \{0\} = f_0$  dans  $F_0$ ,  $j_{0\#}(\pi_1(f_0, \hat{a}))$  à un élément dans chaque classe de  $\pi_1(F_0, \hat{a})/\pi_1(L, \hat{a})$ . (D'après un théorème bien connu sur les revêtements).

Soit  $i'_\#$ , la restriction de  $i_\#$  à  $f = F \cap N$ .

$$i'_{\#}(\pi_1(l, a)) \subset \pi_1(L, a) \subset \pi_1(F, a)$$

Ainsi  $i'_{\#}$  induit un homomorphisme  $i'_{\#}$  de  $\pi_1(f, a)/\pi_1(l, a)$  dans  $\pi_1(F, a)/\pi_1(L, a)$  qui est la restriction de  $i_{\#}$  à  $\pi_1(f, a)/\pi_1(l, a)$  et la condition 2) s'écrit encore :

2')  $i'_{\#} : \pi_1(f, a)/\pi_1(l, a) \longrightarrow \pi_1(F, a)/\pi_1(L, a)$  est un isomorphisme.

D'autre part la condition 1 est équivalente à la condition suivante :

1') Si  $\tau_0$  est une transversale fermée à  $\mathcal{F}_N$  telle que

$$\pi_1(N, a)/\pi_1(l, a) \simeq \pi_1(f, a)/\pi_1(l, a) \oplus \left\{ \overline{\tau_0} \right\}$$

alors on obtient l'isomorphisme suivant :

$$\pi_1(M, a)/\pi_1(L, a) \simeq \pi_1(F, a)/\pi_1(L, a) \oplus \left\{ i_{\#}(\overline{\tau_0}) \right\}$$

où  $\overline{\tau_0}$  et  $i_{\#}(\overline{\tau_0}) = \overline{i(\tau_0)}$  désignent respectivement les classe de  $\tau_0$  dans  $\pi_1(N, a)/\pi_1(l, a)$  et dans  $\pi_1(M, a)/\pi_1(L, a)$ . Ainsi, si  $L \cap N$  est connexe on a :

$$\pi_1(M, a)/\pi_1(L, a) = i_{\#} \left[ \left( \pi_1(f, a)/\pi_1(l, a) \right) \oplus \left( \overline{\tau_0} \right) \right] = i_{\#} \left( \pi_1(N, a)/\pi_1(l, a) \right)$$

Réciproquement, si  $i_{\#}$  est surjective, la restriction  $i'_{\#}$  de  $i_{\#}$  à  $\pi_1(f, a)/\pi_1(l, a)$  a pour image  $\pi_1(F, a)/\pi_1(L, a)$  et il existe une transversale fermée  $\tau_0$  à  $\mathcal{F}_N$  telle que la condition 1') soit vérifiée et ainsi  $L \cap N$  est connexe.

Démonstration du théorème : En passant au double  $2M$  de  $M$  on obtient sur  $2M$  le feuilletage  $2\mathcal{F}$ , et le  $2\mathcal{F}$ -flot  $2\psi$  dont les restrictions à  $M$  et  $N$  sont respectivement le  $\mathcal{F}$ -flot  $\psi$  et le  $\mathcal{F}_N$ -flot  $\psi_N$  (5.I). D'après le lemme 1.3, il existe une  $2\mathcal{F}$ -fibration  $(2M, p)$  dont les restrictions respectives  $(M, p)$  à  $M$  et  $(N, p_N)$

à  $N$  sont des  $\mathcal{F}$ -fibrations et des  $\mathcal{F}_N$ -fibrations (dont les fibres ne sont pas nécessairement connexes). Du théorème 1.2. et du lemme 2.3. on déduit qu'une feuille  $2L$  de  $2\mathcal{F}$  est un revêtement  $(2L, n_{2L})$  de la fibre  $2F$  de  $(2M, 2p)$  tel que:

1) le groupe des automorphismes de ce revêtement galoisien est isomorphe à  $\pi_1(2F, a)/\pi_1(2L, a)$  où  $a$  désigne un point de  $N$ .

2) Les restrictions de  $n_{2L}$  à  $L = 2L \cap M$  et  $2L \cap N$  sont des revêtements respectifs  $n_L$  et  $n_{L \cap N}$  de  $F = 2F \cap N$  et  $F \cap N = 2F \cap N$ .

Or  $F$  et  $F \cap N$  étant respectivement les fibres de  $(M, p)$  et  $(N, p_N)$  et d'autre part  $2L \cap N$  étant connexe,  $F$  est connexe. La propriété ii) $\beta$ ) de l'énoncé est alors une conséquence du lemme 2.3.

Pour achever la démonstration de i) il suffit de montrer que l'inclusion  $u : M \hookrightarrow 2M$  induit un isomorphisme de  $\pi_1(M, a)/\pi_1(L, a)$  sur  $\pi_1(2M, a)/\pi_1(2L, a)$ . Puisque  $u_{\#}$  applique  $\pi_1(L, a)$  dans  $\pi_1(2L, a)$ ,  $u$  induit un homomorphisme  $u_{*}$  entre les 2 groupes quotients cités plus haut. Tout élément de  $\pi_1(M, a)/\pi_1(L, a)$  étant représentable par une transversale fermée de  $\mathcal{F}$ ,  $u_{*}$  est injective. Soit  $S$  la rétraction de  $2M$  sur  $M$ . A  $S$  correspond un épimorphisme  $S_{\#}$  de  $\pi_1(2M, a)$  sur  $\pi_1(M, a)$  tel que  $S_{\#}(\pi_1(2L, a)) = \pi_1(L, a)$ . Ainsi  $S$  induit un homomorphisme  $S_{*}$  entre les quotients. Pour montrer que  $u_{*}$  est surjective il suffit de montrer que  $S_{*}$  est injective. Soit  $\tau$  une transversale fermée de  $2\mathcal{F}$ ;  $\tau$  est homotope à un plongement  $\tau'$  de  $S^1$  dans  $2M$  tel que :

- $\tau'(S^1)$  coupe  $\partial M$  en un nombre fini de points.
- en chacun de ces points,  $\tau'(S^1)$  est tangent à  $\partial M$ .

Ainsi  $S(\tau')$  est une transversale fermée de  $\mathcal{F}$  de même sens que  $\tau$ . On en déduit que  $S_{*}(\tau) = S_{*}(\tau')$  n'est pas nul et  $S_{*}$  étant injective,  $u_{*}$  est surjective, c'est donc un isomorphisme.

Il nous reste à montrer 2.γ). D'après le lemme 2.3.,  $2L \cap N = L \cap N$ , est connexe si et seulement si l'inclusion  $u \circ i : N \hookrightarrow 2M$  induit un isomorphisme  $(u \circ i)_*$  de  $\pi_1(N, a) / \pi_1(L \cap N, a)$  sur  $\pi_1(2M, a) / \pi_1(2L, a)$ . Puisque  $u_*$  est un isomorphisme cette condition est réalisée si et seulement si  $i_*$  induit un isomorphisme sur  $\pi_1(M, a) / \pi_1(L, a)$ .

Corollaire 2.3. *Il n'existe pas de variété compacte à bord non vide, possédant un feuilletage de classe  $r \geq 2$ , de codimension 1, dont les feuilles sont difféomorphes à  $\mathbb{R}^{n-2} \times \mathbb{R}^+$ .*

Démonstration : Supposons que  $M^n$  possède un tel feuilletage  $\mathcal{F}$ . Du théorème précédent et de son corollaire on déduit que :

-  $\partial M$  est connexe et homéomorphe à  $T^{n-1}$  car  $\partial \mathcal{F}$  est un feuilletage dont les feuilles sont homéomorphes à  $\mathbb{R}^{n-2}$  (corollaire 2.2.)

- L'inclusion  $i : \partial M \hookrightarrow M$  induit un isomorphisme de  $\pi_1(\partial M, a)$  sur  $\pi_1(M, a)$ .

En appliquant le théorème de Van Kampen à  $2M = M \cup_i M$  on obtient facilement ,

$$\pi_1(2M, a) = u_{\#}(\pi_1(M, a)) = (u \circ i)_{\#}(\pi_1(\partial M, a)) = \mathbb{Z}^{n-1}.$$

D'autre part, les feuilles du feuilletage  $2\mathcal{F}$  de  $2M$  sont difféomorphes à  $\mathbb{R}^{n-1}$ .

Ainsi  $M^n$  est homéomorphe à  $T^n$ , ce qui contredit le résultat précédent.

Corollaire 3.3. *Si  $M^n$  est une variété à bord non connexe, munie d'un feuilletage  $\mathcal{F}$  de classe  $r \geq 2$  dont les feuilles sont difféomorphes à  $\mathbb{R}^{n-2} \times I$ , pour  $n \neq 4, 5$ ,  $M^n$  est homéomorphe à  $T^{n-1} \times I$ .*

Comme pour le corollaire 2.2. le théorème semble vrai pour  $n = 4, 5$ . Mais le raisonnement que nous allons faire ne s'applique pas. En outre il est vraisemblable aussi que la condition " $\partial M$  non connexe" est superflue.

Démonstration: Les feuilles de  $\mathcal{F}$  ayant toutes des intersections difféomorphes avec  $\partial M$  et le bord d'une feuille ayant 2 composantes connexes, il en est de même pour  $\partial M$ . Sur ces deux composantes,  $\partial M_k$ ,  $k = 0, 1$ ,  $\mathcal{F}$  induit des feuilletages  $\partial \mathcal{F}_k$  dont les feuilles sont difféomorphes à  $\mathbb{R}^{n-2}$ . Elles sont donc homéomorphes à  $T^{n-1}$ . Nous allons montrer que  $(\partial M_0, M, \partial M_1)$  est un S-cobordisme.

Soit  $i_k : \partial M_k \hookrightarrow M_0$ . L'intersection d'une feuille de  $\mathcal{F}$  avec  $\partial M_k$  étant connexe,  $i_{k\#}$  est un isomorphisme. Le théorème 2.1 entraîne que  $M^n$  est un fibré sur  $S^1$  dont la fibre  $F$  a pour revêtement universel  $\mathbb{R}^{n-2} \times I$ . Ainsi  $\pi_j(F) = \pi_j(M^n) = 0$  si  $j > 1$  et  $i_k$  induit un isomorphisme de  $\pi_j(\partial M_k)$  sur  $\pi_j(M)$  quel que soit  $j \geq 0$ . C'est une homotopie équivalence.

Pour  $n \geq 6$ ,  $(\partial M_0, M, \partial M_1)$  étant un S-cobordisme  $M$  est homéomorphe à  $T^{n-1} \times I$ . Pour  $n = 3$ , la fibre  $F$ , ayant pour revêtement  $\mathbb{R} \times I$ ,  $M$  est irréductible et le théorème du S-cobordisme s'applique encore. D'après [21] on peut même affirmer que  $\mathcal{F}$  est topologiquement conjugué à un feuilletage obtenu en prenant le produit par  $I$  d'un feuilletage linéaire du tore  $T^2$ .

#### 4 - Construction de feuilletages sans holonomie.

Dans [21], R. Roussarie a entièrement résolu ce problème pour les variétés  $M^2 \times S^1$  où  $M^2$  est une surface à bord ou sans bord. L'étude que nous allons faire sur des fibrés sur  $S^1$  de dimension quelconque est beaucoup moins ambitieuse.

Théorème 1.4. Soit  $(M^n, p)$  un  $C^r$ -fibré sur  $S^1$  ( $r > 2$ ) compact, (à bord ou sans bord) de fibre type  $F$ . Quels que soient le point  $a$  de  $M$  et le sous-groupe  $H_a$  de  $\pi_1(F, a) \subset \pi_1(M, a)$  tel que le groupe  $\pi_1(M, a)/H_a$  est abélien libre, il existe

un feuilletage  $\mathcal{F}$  de  $M^n$  de codimension 1, de classe  $r$  et sans holonomie tel que :

i)  $(M, p)$  est une  $\mathcal{F}$ -fibration

ii)  $L$  désignant la feuille de  $\mathcal{F}$  qui passe par  $a$ ,  $\pi_1(L, a) = H_a$ .

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate du théorème précédent et des théorèmes 1.2 et 1.3.

Corollaire 1.4. Un revêtement  $(L, n_L)$  de la fibre  $F$  est réalisable comme feuille d'un feuilletage sans holonomie de classe  $r$  de  $M^n$  si et seulement si le groupe des automorphismes du revêtement est abélien libre.

Démonstration du théorème. La démonstration est analogue à celle du théorème 2.1., ainsi on en indiquera que les points importants. Les deux conditions imposées à  $H_a$  entraînent que  $H_1(M, \mathbb{R})$  est isomorphe à

$$(\mathbb{R} \oplus (\pi_1(F, a)/H_a) \otimes \mathbb{R}) \oplus ((H_a/C(M, a)) \otimes \mathbb{R})$$

Soient  $\{\bar{\tau}_i\}_{0 \leq i \leq p}$ ,  $p+1$  lacets en  $a$ , dont les classes  $\bar{\tau}_i$  dans  $H_1(M, \mathbb{R})$ , pour  $i \geq 1$ , forment une base de  $(\pi_1(F, a)/H_a) \otimes \mathbb{R}$  et tels que pour  $i = 0$

$p_*(\bar{\tau}_0) = 1 \in H_1(S^1, \mathbb{R})$ . On désigne par  $\{\bar{\tau}_i^*\}_{0 \leq i \leq p}$  les éléments correspondants de  $H^1(M, \mathbb{R})$  et par  $\{\tau_i^*\}_{0 \leq i \leq p}$   $p+1$  1-formes de classe  $r$  dont les classes de cohomologie correspondent à ces éléments par l'isomorphisme classique. On peut

toujours prendre  $\tau_0^* = p^*(d\theta)$ , la 1-forme qui définit la fibration. Ces éléments sont caractérisés par :

$$\int_{\tau_i} \tau_j^* = \langle \bar{\tau}_i, \bar{\tau}_j^* \rangle = \delta_{i,j} \quad \text{pour } 0 \leq i \text{ et } j \leq p$$

$$\int_{\alpha} \tau_i^* = \langle \bar{\alpha}, \bar{\tau}_i^* \rangle = 0 \quad \text{pour } 0 \leq i \leq p \text{ si } \bar{\alpha} \in (H_a/C(M, a)) \otimes \mathbb{R}$$

Un réel  $\varepsilon > 0$  étant donné, il existe  $p+1$  réels rationnellement indépendants

$\{r_i\}_{0 < i \leq p}$  tels que si  $\omega = \sum_{i=0}^p r_i \tau_i^*$  alors  $\|\omega - \tau_0^*\| < \varepsilon$ . (Il suffit pour cela de prendre  $(1-r_0)$  et  $r_i$  pour  $i \geq 1$  assez petits). Dès que  $\varepsilon$  est suffisamment petit,  $\omega$  ne s'annule pas et définit un feuilletage  $\mathcal{F}$  de classe  $r$  pour lequel  $(M,p)$  est une  $\mathcal{F}$ -fibration. Montrons que  $\mathcal{F}$  satisfait à la condition ii). Soient  $L$  la feuille de  $\mathcal{F}$  qui passe par  $a$ ,  $\alpha$  un représentant d'un élément de  $H_a$ ,  $\bar{\alpha}$  sa classe dans  $H_1(M, \mathbb{R})$

$$\int_{\alpha} \omega = \sum_{i=0}^p r_i \int_{\alpha} \tau_i^* = \sum_{i=0}^p r_i \langle \bar{\alpha}, \bar{\tau}_i^* \rangle = 0$$

Ainsi  $[\alpha]$  est un élément de  $\pi_1(L,a)$ . Réciproquement si  $\alpha$  représente un élément de  $\pi_1(L,a)$  sa classe  $\bar{\alpha}$  dans  $H_1(M, \mathbb{R})$  s'écrit

$$\bar{\alpha} = \sum_{i=0}^p m_i \bar{\tau}_i^* + \bar{\alpha}' \quad \text{où } m_i \in \mathbb{Z} \text{ et } \bar{\alpha}' \in (H_a/C(M,a)) \otimes \mathbb{R}$$

On en déduit :

$$0 = \int_{\alpha} \omega = \sum_{i=1}^p r_i \langle \bar{\alpha}, \bar{\tau}_i^* \rangle = \sum_{i=1}^p r_i m_i$$

Comme les  $r_i$  sont rationnellement indépendants,  $m_i = 0$  pour  $0 < i \leq p$ . Ainsi  $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}'$  et  $[\alpha]$  est un élément de  $H_a$ .

Dans [30], J.W. Wood montre que sur une variété  $M^n = S^1 \times V^{n-1}$  où  $V^{n-1}$  est une variété compacte, tout champ de  $(n-1)$ -plans est homotope à un champ de plans intégrale, le corollaire suivant fournit une propriété analogue pour certains fibrés sur  $S^1$ .

Corollaire 2.4. *Si  $M^n$  est un  $C^r$ -fibré sur  $S^1$  ( $r \geq 2$ ) dont le premier groupe d'homologie n'a pas de torsion, tout champ de  $(n-1)$ -plans sur  $M$  est homotope à un champ de  $(n-1)$ -plans intégrable.*

Démonstration : Si  $H_1(M)$  n'a pas de torsion, il existe un feuilletage  $\mathcal{F}$  de

classe  $r$  de  $M$  tel que,  $L$  désignant la feuille qui passe par  $a$ ,  $\pi_1(L, a) = C(M, a)$ . Le corollaire 2.1 appliqué à  $\mathcal{F}$  fournit une base  $\gamma_i$  de  $H_1(M)$  dont les éléments sont représentables par des plongements  $\gamma_i$  de  $S^1$  transverses à  $\mathcal{F}$ . Il est naturellement possible de supposer que les  $\gamma_i(S^1)$  ne se coupent pas ( $n \geq 3$ ). Le corollaire est alors une conséquence du théorème 9.3. de [30].

Remarque 1.4. Le théorème précédent nous fournit la réponse à la question posée dans le paragraphe 2 : Existe-t-il des variétés  $M^n$  munies d'un feuilletage de classe  $r \geq 2$ , dont les feuilles sont difféomorphes à  $\mathbb{R}^{n-1}$  et qui sont des tores exotiques pour la structure  $S_{\mathcal{F}}$  ? On sait que pour  $n \geq 7$ , il existe des tores exotiques  $T^n$ . La fibre d'une fibration  $C^\infty$  de  $T^n$  est homéomorphe à  $T^{n-1}$ . En appliquant le corollaire 1.4 à cette fibration, on obtient un feuilletage de  $T^n$  de classe  $C^\infty$  dont les feuilles sont homéomorphes  $\mathbb{R}^{n-1}$  et, puisque  $n-1 \geq 6$ , elles sont mêmes difféomorphes à  $\mathbb{R}^{n-1}$ .

### III - Feuilletage presque sans holonomie.

Un feuilletage est presque sans holonomie si toutes ses feuilles non compactes ont une holonomie nulle ; c'est le cas par exemple pour un feuilletage dont les feuilles non compactes sont simplement connexes. De tels feuilletages sont étudiés dans le paragraphe 2 : on montre que le groupe d'holonomie d'une feuille compacte isolée est alors archimédien. Ce résultat permet de donner une réponse négative à la question suivante posée par G. Reeb : existe-t-il des feuilletages de  $M^2 \times I$  ( $M^2 \neq T^2$ ) dont les feuilles intérieures sont des plans ?

Dans les paragraphes 1 et 3 les feuilles des feuilletages considérés vérifient deux conditions A et B (Définition 1.1) qui sont toujours vraies pour des feuilletages sans holonomie. Un tel feuilletage est sans holonomie s'il ne possède pas de feuille compacte, sinon chacune de ses feuilles contient une feuille compacte dans son adhérence. En imposant une condition supplémentaire à ses feuilles compactes, il est montré dans le paragraphe 3 qu'il est presque sans holonomie et qu'il ne possède pas de feuille exceptionnelle. On en déduit une généralisation des résultats obtenus par G. Reeb dans [15], sur les feuilletages de  $M^n \times I$ .

Enfin, après avoir démontré quelques propriétés des plongements de  $T^{n-1}$  dans  $T^n$ , les résultats précédents sont utilisés pour décrire, dans le paragraphe 4, les feuilletages de  $T^n$  et  $T^{n-1} \times I$  définis par des actions localement libres de  $R^{n-1}$ .

1 - Sur la non existence d'ensemble minimal exceptionnel.

Nous avons vu dans le chapitre précédent qu'en tout point  $a$  d'une feuille  $L$  d'un feuilletage sans holonomie, de codimension 1, de classe  $r \geq 2$ , d'une variété compacte  $M^n$ , les deux conditions suivantes sont réalisées :

- a) l'injection  $i_L : L \hookrightarrow M$  induit un monomorphisme  $i_{L\#}$  de  $\pi_1(L, a)$  dans  $\pi_1(M, a)$  (où  $a$  est un point de  $L$ ).
- b) L'image de  $i_{L\#}$  contient le sous-groupe des commutateurs  $C(M, a)$  de  $\pi_1(M, a)$ .

Définition 1.1. On dira qu'un feuilletage  $\mathcal{F}$  (non nécessairement sans holonomie) d'une variété  $M^n$

- satisfait à la condition A si quelle que soit la feuille  $L$  de  $\mathcal{F}$ , il existe un point de  $L$  où a) est vérifié.
- satisfait à la condition B si quelle que soit la feuille non compacte  $L$  de  $\mathcal{F}$ , il existe un point de  $L$  où b) est vérifié.

Naturellement si la condition a) ou la condition b) est satisfaite en un point  $a$ , elle est satisfaite en tout point de la feuille qui passe par  $a$ . Remarquons que la condition B est satisfaite lorsque la variété  $M^n$  a un groupe fondamental abélien. Quant à la condition A, lorsque  $n = 3$  elle est équivalente à l'absence de composante de Reeb ([13]). Malheureusement il n'existe pas une telle interprétation géométrique de cette condition lorsque  $n$  est supérieur à trois. Signalons d'autre part que le fait que la condition B ne porte que sur les feuilles non compactes n'est pas gratuit. Il sera utilisé dans le chapitre suivant (feuilletage de Stallings-Neuwirth).

Rappelons qu'un ensemble minimal pour un feuilletage  $\mathcal{F}$  de codimension 1,

d'une variété compacte  $M^n$ , est un sous-ensemble compact, non vide, saturé pour la relation d'équivalence associée à  $\mathcal{F}$  et minimal pour l'inclusion parmi ces ensembles. En utilisant l'axiome de Zorn on montre que toute feuille de  $\mathcal{F}$  a dans son adhérence un ensemble minimal. La relation d'équivalence associée à  $\mathcal{F}$  étant ouverte, trois cas peuvent se présenter.

1. La variété est elle-même un ensemble minimal. Les feuilles de  $\mathcal{F}$  sont alors partout denses dans  $M^n$ . (C'est le cas pour les feuilletages sans holonomie qui ne sont pas des fibrations).

2. L'ensemble minimal est constitué d'une seule feuille. Cette feuille est alors nécessairement compacte.

3. L'ensemble minimal est exceptionnel. Les feuilles de cet ensemble ne sont alors ni propres, ni denses ; elles sont exceptionnelles et naturellement l'adhérence de chacune d'elles est l'ensemble minimal exceptionnel.

Le théorème suivant fournit une classe de feuilletages pour lesquels le "théorème" de Bendixson Poincaré est vrai.

Théorème 1.1. Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage, de codimension 1, transversalement orientable, de classe  $r \geq 2$ , d'une variété compacte  $M^n$  (tangente ou transverse à  $\partial M$  si  $\partial M$  n'est pas vide). Alors, si  $\mathcal{F}$  satisfait aux conditions A et B,  $\mathcal{F}$  ne possède pas d'ensemble minimal exceptionnel.

Dans l'exemple de feuilletage possédant un ensemble minimal exceptionnel de R. Sacksteder [22], le feuilletage ne vérifie pas la condition B. La démonstration de ce théorème repose sur le lemme suivant qui est une conséquence du théorème 1 de [24]. Récemment B. Raymond a trouvé une méthode de perturbation des feuilletages des variétés de dimension trois telle que le feuilletage perturbé possède un ensemble minimal exceptionnel.

Lemme 1.1. Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage de codimension 1, de classe  $r \geq 2$  transversalement orientable d'une variété compacte  $M^n$  qui possède un ensemble minimal exceptionnel  $K$ . Alors il existe un point  $a$  appartenant à  $K$  et un difféomorphisme local d'holonomie en  $a$ ,  $f_\alpha \in P(L, a)$ , qui n'est pas tangent à l'application identique en zéro.

La démonstration de ce lemme a été reprise par B. Raymond dans sa thèse de 3ème cycle.

Lemme 2.1. Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage de  $M^n$  qui satisfait aux mêmes conditions que dans le théorème 1.1. Alors si une transversale fermée de  $\mathcal{F}$  coupe une feuille non compacte, elle n'est pas homologue à un lacet dans cette feuille.

Démonstration : Soit  $\tau$ , une transversale fermée, qui coupe une feuille  $L$  de  $\mathcal{F}$  en un point  $a$ . Supposons qu'il existe un lacet  $\alpha$  dans  $L$  homologue à  $\tau$ . Désignons par  $\beta$  un chemin dans  $L$  qui joint  $a$  à  $\alpha(0) = \alpha(1) = b$ . Les lacets  $\tau$  et  $\beta \cdot \alpha \cdot \beta^{-1}$  sont homologues. Si  $L$  n'est pas compacte, puisque  $\mathcal{F}$  vérifie la condition B, il existe un lacet  $c$  en  $a$  dans  $L$  ( $[c] \in C(M, a)$ ) tel que le lacet  $c \cdot \beta \cdot \alpha \cdot \beta^{-1}$  dans  $L$  est homotope avec point base  $a$  à la transversale fermée  $\tau$ . Alors, d'après le corollaire 1.4.I, le feuilletage  $\mathcal{F}$  ne peut pas vérifier la condition A.

Lemme 3.1. Soient  $\mathcal{F}$  un feuilletage de  $M^n$  qui satisfait aux mêmes conditions que dans le théorème 1.1. et  $P(L^+, a)$  le pseudo-groupe d'holonomie positive en un point  $a$  d'une feuille non compacte  $L$  de  $\mathcal{F}$ . Alors si  $f_\alpha : [0, \epsilon] \rightarrow \mathbb{R}^+$  est un élément de  $P(L^+, a)$ , un point  $s$  de  $[0, \epsilon]$  est un point fixe de  $f_\alpha$  dès que  $\eta_a(s)$  appartient à  $L$ .

Ainsi, en tout point d'une feuille non propre de  $\mathcal{F}$ , tout difféomorphisme local d'holonomie admet un ensemble de points fixes, autre que zéro, qui contient zéro dans son adhérence.

Démonstration : Soient  $a$  un point de  $L$  et  $\alpha : I \rightarrow L$  une immersion qui représente un élément de  $\pi_1(L, a)$ . L'application  $F$  de relèvement suivant les normales est alors une immersion

$$F : I \times [0, \varepsilon] \longrightarrow M^n, \quad F(0, s) = n_a(s)$$

à laquelle correspond le difféomorphisme local d'holonomie

$$f_\alpha : [0, \varepsilon] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_\alpha(s) = s' \quad \text{si} \quad F(1, s) = n_a(s')$$

Supposons qu'un point  $s$  de  $(0, \varepsilon]$  ne soit pas un point fixe de  $f_\alpha$  et que par exemple  $f_\alpha(s) = s' < s$ . Le relèvement de  $\alpha$  de hauteur  $s$  est un chemin  $\alpha_s$  qui joint  $b = n_a(s)$  à  $b' = n_a(s')$ . Désignons par  $b'b$  le segment de normale  $n_a/[s', s]$  (orienté positivement). Par construction de  $\alpha_s$ , le lacet  $\alpha_s.(b'b)$  en  $b$  est homotope librement à  $\alpha$  (Figure 1.1)

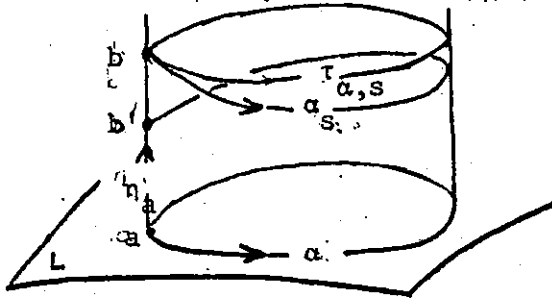


Figure 1.1.

Du lemme 1.4.I, on déduit qu'il existe une transversale fermée  $\tau_{\alpha, s}$  positive, homotope à  $\alpha_s.b'b$  avec point base  $b$ . Ainsi  $\tau_{\alpha, s}$  est homologue au lacet  $\alpha$  dans  $L$ . Le lemme précédent implique que  $b$  n'appartient pas à  $L$ .

Dans la suite du chapitre nous utiliserons souvent la construction précédente d'une transversale fermée à partir d'un difféomorphisme local d'holonomie  $f_\alpha$ , non trivial, associé à un lacet  $\alpha$  dans une feuille  $L$ . Nous noterons  $\tau_{\alpha, s}$  la

transversale fermée ainsi construite au point  $n_a(s)$  (où  $f_\alpha(s) \neq s$ ).  $\tau_{\alpha,s}$  est positive (resp. négative) si  $s-f(s) > 0$  (resp.  $< 0$ ) et coupe les mêmes feuilles que le segment de normale  $n_a/[f(s),s]$  (lemme 1.4.I).

Démonstration du théorème 1.1. Supposons que  $\mathcal{F}$  possède un ensemble minimal exceptionnel  $K$ . Soit  $\alpha$  le lacet en  $a$ , dans une feuille  $L \subset K$ , obtenu avec le lemme 1.1. Puisque  $f_\alpha$  n'est pas tangent à l'identité en zéro, il existe  $\varepsilon' > 0$  tel que  $f_\alpha$  ne possède pas de point fixe sur  $(0,\varepsilon')$ . Or la feuille  $L$  n'est pas une feuille propre, et ainsi il existe  $s' \in (0,\varepsilon')$  tel que  $n_a(s')$  est un point de  $L$ , ce qui contredit le lemme précédent.

Le théorème suivant peut être considéré comme une réciproque du théorème 2.1.II.

Théorème 2.1. *Un feuilletage  $\mathcal{F}$  de codimension 1, transversalement orientable, de classe  $r \geq 2$ , d'une variété compacte  $M^n$  (transverse à  $\partial M$  si  $\partial M \neq \emptyset$ ) dont toutes les feuilles sont simultanément compactes ou non compactes à une holonomie nulle lorsqu'il vérifie les conditions A et B.*

Démonstration : Si toutes les feuilles de  $\mathcal{F}$  sont compactes le résultat est fourni par le théorème de stabilité [14]. Supposons que  $\mathcal{F}$  ne possède pas de feuilles compactes. Le seul ensemble minimal de  $\mathcal{F}$  est  $M^n$  d'après le théorème précédent et la classification des ensembles minimaux. Les feuilles de  $\mathcal{F}$  sont donc partout denses dans  $M^n$ .

Soit alors, en un point  $a$  d'une feuille  $L$  de  $M^n$  un difféomorphisme local d'holonomie positive,  $f_\alpha : [0,\varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}$ . Puisque  $L$  est partout dense dans  $M^n$ ,  $n_a : [0,\varepsilon] \rightarrow M^n$  désignant un segment de normale (positif) en  $a$ ,  $n_a^{-1}(L)$  est un sous-ensemble dense de  $[0,\varepsilon]$ . D'après le lemme 3.1, chaque point de ce sous-

ensemble est un point fixe de  $f_\alpha$ . Ainsi  $f_\alpha$  est l'application identique de  $[0, \epsilon]$ .

Ce dernier théorème sera essentiellement appliqué dans le chapitre suivant aux variétés de dimension trois. Il permet cependant de retrouver un résultat connu ([24]) sur les actions localement libres de  $\mathbb{R}^{n-1}$  sur  $T^n$ . En effet le feuilletage défini par une telle action vérifie nécessairement la condition A, [8]. Ainsi, si ce feuilletage ne possède pas de feuille compacte, il a une holonomie nulle.

Nous sommes, après ce théorème, amenés naturellement à étudier les feuilletages vérifiant les conditions A et B qui possèdent des feuilles compactes. Mais avant, nous allons définir et étudier une autre classe de feuilletages.

## 2 - Généralités sur les feuilletages presque sans holonomie.

Définition 1.2. On dit qu'un feuilletage  $\mathcal{F}$  d'une variété compacte  $M^n$  (transverse ou tangent à  $\partial M$  si  $\partial M$  n'est pas vide) est presque sans holonomie si toutes les feuilles non compactes de  $\mathcal{F}$  ont une holonomie nulle.

Les feuilletages sans holonomie en sont un cas particulier. Si  $\mathcal{F}$  est un feuilletage de  $M^n$  presque sans holonomie, quelle que soit la transversale fermée  $\tau : S^1 \rightarrow M^n$  plongée dans  $M^n$ , le feuilletage  $\mathcal{F}'$  obtenu en faisant un tourbillonnement de  $\mathcal{F}$  autour de  $\tau(S^1)$  est encore un feuilletage presque sans holonomie. On peut aussi très facilement construire de tels feuilletages à partir d'un feuilletage transverse au bord défini par une 1-forme fermée (voir Chap. IV).<sup>(1)</sup>

D'après le lemme 1 du paragraphe précédent, un feuilletage presque sans holonomie, de classe  $r \geq 2$ , ne possède pas d'ensemble minimal exceptionnel ; si

---

(1) Il est facile de montrer, comme me l'a fait remarquer H. Rosenberg, que les feuilletages définis par une action localement libre de  $\mathbb{R}^{n-1}$  sur une variété compacte  $M^n$  sont presque sans holonomie.

ce n'est pas un feuilletage sans holonomie, chacune de ses feuilles non compactes a dans son adhérence une feuille compacte. Il est naturel alors d'étudier les germes d'un tel feuilletage le long de ses feuilles compactes, c'est à dire l'holonomie de ces feuilles qui caractérisent de tels germes [4].

Théorème 1.2. Soit  $L_0$  une feuille compacte d'un feuilletage  $\mathcal{F}$ , presque sans holonomie, de codimension 1, transversalement orientable, de classe  $r \geq 2$ , isolée du côté positif dans l'ensemble des feuilles compactes de  $\mathcal{F}$ . Alors le groupe d'holonomie positive en un point  $a$  de  $L_0^+$  est un sous groupe archimédien de  $\mathcal{G}^r$ .  
(voir 1.I)

Le germe de  $\mathcal{F}$  du côté positif de  $L_0$  est donc déterminé par un élément de  $SH(L_0, \mathbb{R})$  d'après la remarque 1.2.I.

Démonstration : Soit  $\alpha$  un lacet en  $a$  dans  $L_0$  dont la classe d'homotopie appartient à  $\pi_1(L_0, a) - N(L_0^+, a)$ . Désignons par

$$F : I \times [0, \varepsilon] \longrightarrow M^n, \quad (t, s) \longrightarrow F(s, t) = \alpha_s(t)$$

une application de relèvement suivant les normales de  $\alpha$  et par  $f_\alpha : [0, \varepsilon] \longrightarrow \mathbb{R}^+$  le difféomorphisme local d'holonomie correspondant. Supposons que  $f_\alpha$  possède des points fixes autre que zéro. Puisque l'ensemble des points fixes de  $f_\alpha$  est un fermé, il existe  $s_0 \in (0, \varepsilon)$  et  $\varepsilon' \in (0, \varepsilon)$  tels que

$$f(s_0) = s_0 \text{ et } f(s) \neq s \text{ si } s \in [s_0 - \varepsilon', s_0)$$

De plus, puisque  $L_0^+$  est isolée dans l'ensemble des feuilles compactes de  $\mathcal{F}$ , on peut supposer que la feuille  $L_{s_0}$  passant par  $n_a(s_0)$  n'est pas compacte. Le relèvement suivant les normales de  $\alpha$  de hauteur  $s_0$  est un lacet  $\alpha_{s_0}$  au point  $n_a(s_0)$  dans  $L_{s_0}$ . L'application  $G$  suivante,

$$G : I \times [-\varepsilon', 0] \longrightarrow M^n, \quad G(t, s) = F(t, s + s_0)$$

est un relèvement suivant les normales de  $\alpha_{s_0}$  du côté négatif. Il lui correspond le difféomorphisme local d'holonomie négative en  $n_a(s_0)$  suivant :

$$f_{\alpha_{s_0}} : [-\varepsilon', 0] \longrightarrow \mathbb{R}^-, f_{\alpha_{s_0}}(s) = f_{\alpha}(s-s_0)$$

Puisque  $f_{\alpha}$  n'a pas de point fixe sur  $[s_0 - \varepsilon', s_0)$ ,  $f_{\alpha_{s_0}}$  n'a pas de point fixe.

Alors le groupe d'holonomie  $G(L_{s_0}^-, n_a(s_0))$  n'est pas trivial bien que  $L_{s_0}$  ne soit pas une feuille compacte. Ainsi  $\mathcal{F}$  ne serait pas un feuilletage presque sans holonomie.

On en déduit que les difféomorphismes locaux d'holonomie positive en  $a$  ne possèdent pas de points fixes et ainsi  $G(L_0^+, a)$  est un sous-groupe sans point fixe de  $\mathcal{G}^r$ . Le théorème est alors une conséquence de proposition 1.1.I.

Corollaire 1.2. Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage de codimension 1, de classe  $r \geq 2$ , transversalement orientable, d'une variété compacte  $M^n$  dont les feuilles non compactes sont simplement connexes. Si  $\mathcal{F}$  n'a pas de cycle évanouissant non trivial ( $\mathcal{F}$  vérifie A), le groupe fondamental d'une feuille compacte est abélien libre et si cette feuille est isolée dans l'ensemble des feuilles compactes son groupe d'holonomie est un sous-groupe archimédien de  $\mathcal{G}^r$ .

Démonstration : Les feuilles non compactes de  $\mathcal{F}$  étant simplement connexes,  $\mathcal{F}$  est un feuilletage presque sans holonomie. Puisque toute feuille compacte non isolée dans l'ensemble des feuilles compactes est isotope à une feuille compacte  $L$  isolée d'un côté au moins dans l'ensemble des feuilles compactes de  $\mathcal{F}$ , il suffit de montrer que si  $[\alpha]$  appartient à  $N(L, a)$ ,  $\alpha$  est homotope à zéro dans  $L$ . Soit  $\alpha_s$  un relèvement suivant les normales, de hauteur  $s$ , de  $\alpha$ , du côté où  $L$  est isolée, dans l'ensemble des feuilles compactes de  $\mathcal{F}$ .  $\alpha_s$  est un lacet dans une feuille simplement connexe. Ainsi  $\alpha$  est homotope à zéro dans  $M^n$ . Puisque  $\mathcal{F}$  vérifie la condition A, il est homotope à zéro dans  $L$ .

Ce corollaire répond à une question posée par G.Reeb dans [15]. Existe-t-il des feuilletages de  $M^2 \times I$  où  $M^2$  est une surface compacte de genre supérieur ou égal à deux dont  $M^2 \times \{0\}$  et  $M^2 \times \{1\}$  sont les seules feuilles compactes, les feuilles non compactes étant difféomorphes à  $\mathbb{R}^2$ . La réponse est donc négative si l'on impose au feuilletage d'être au moins de classe 2. D'une façon plus générale on peut énoncer :

Corollaire 2.2. Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage de codimension 1, de classe  $r \geq 2$ , orientable, d'une variété compacte  $M^3$  dont les feuilles non compactes sont homéomorphes à  $\mathbb{R}^2$ . Alors si  $\mathcal{F}$  possède au moins une feuille non compacte :

i) Les feuilles compactes de  $\mathcal{F}$  sont homéomorphes à des tores  $T^2$ .

ii) Les feuilles non compactes qui ne sont pas contenues dans une composante de Reeb sont localement partout denses dans  $M^3$ . Ainsi  $\mathcal{F}$  ne possède pas de feuille exceptionnelle.

Démonstration : i) Si une feuille compacte n'est pas le bord d'une composante de Reeb de  $\mathcal{F}$ , on peut lui appliquer le raisonnement précédent. Son groupe fondamental est abélien. D'après le théorème de stabilité il n'est pas trivial. Cette feuille est homéomorphe à un tore de  $T^2$ .

ii) Soit  $L$  une feuille non compacte. Si elle n'est pas incluse dans une composante de Reeb, elle contient dans son adhérence une feuille compacte  $L_0$  dont le groupe d'holonomie  $G(L_0, a)$  est isomorphe à  $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$  puisque  $N(L_0, a) = 0$  d'après le corollaire 1.2. D'après le théorème 1.3.I,  $L$  est localement partout dense. Si  $L$  est incluse dans une composante de Reeb, elle est propre et ceci achève la démonstration.

Remarque 1.2. Du corollaire 1 page 43 de [21] on déduit (avec les mêmes hypothèses) que  $M^3$  est difféomorphe à une des variétés suivantes :

- 1 - La somme de deux tores solides  $D^2 \times S^1$  (recollés le long de leur bord)
- 2 - Un fibré sur  $S^1$  de fibre  $T^2$
- 3 - Un tore solide  $D^2 \times S^1$
- 4 - Le produit  $T^2 \times [0,1]$

Ce corollaire sera précisé par le théorème 1.1.IV. En dimension  $n > 3$  le résultat ne peut pas être aussi précis puisqu'il n'existe pas d'interprétation géométrique de la notion de cycle évanouissant non trivial. Cependant avec des conditions supplémentaires sur la variété, on obtient des résultats analogues, par exemple le corollaire suivant :

Corollaire 3.2. Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage de  $M^{n-1} \times [0,1]$ , transversalement orientable, de classe  $r \geq 2$ , dont les seules feuilles compactes sont  $M^{n-1} \times \{0\}$  et  $M^{n-1} \times \{1\}$  et dont les feuilles non compactes sont homéomorphes à  $\mathbb{R}^{n-1}$ . Alors si  $n \geq 6$  (ou  $n = 3$ )  $M^{n-1}$  est homéomorphe à  $T^{n-1}$ .

Démonstration : D'après le corollaire 1.2, si  $a$  est un point de  $M^{n-1} \times \{0\}$ ,  $\pi_1(M^{n-1} \times \{0\}, a)$  est isomorphe à  $G(M^{n-1} \times \{0\}, a)$  et c'est un groupe abélien libre. Il nous suffit de montrer que  $\pi_q(M^{n-1} \times \{0\}, a)$  est nul si  $q > 1$  pour appliquer le théorème de Wall (2-II) et obtenir ainsi le résultat.

Soit  $f : (S_q, x_0) \rightarrow (M^{n-1} \times \{0\}, a)$ . Puisque  $S_q$  est simplement connexe, on peut appliquer le théorème 1.2.I de relèvement suivant les normales à  $f$  : il existe  $\varepsilon > 0$  et une application de relèvement de  $f$  :

$$F : S_q \times [0, \varepsilon] \longrightarrow M^{n-1} \times [0, 1]$$

Soit alors :

$$f_s : S_q \times \{s\} \longrightarrow L_s, \quad f_s(x) = F(x,s), \quad 0 \leq s \leq \epsilon \quad (f_0 = f)$$

où  $L_s$  désigne la feuille qui passe par  $n_a(s)$ . Puisque  $L_s$  est homéomorphe à  $\mathbb{R}^{n-1}$ ,  $f_s$  est homotope à une application constante dans  $L_s$ , donc dans  $M^{n-1} \times [0,1]$ . Or, par construction,  $f$  est homotope à  $f_s$ . Ainsi  $f$  est homotope à une application constante dans  $M^{n-1} \times [0,1]$  donc dans  $M^{n-1}$ .

Remarque 2.2. Si  $L_0$  est une feuille compacte isolée d'un feuilletage  $\mathcal{F}$  par plans  $\mathbb{R}^{n-1}$  et feuilles compactes (d'une variété  $M^n$  compacte) qui vérifie la condition A. on sait que  $\pi_1(L_0)$  est abélien libre. Soit maintenant,  $f : S_q \rightarrow L_0$ , un représentant d'un élément de  $\pi_q(L_0)$ . On sait que les relèvements  $f_s$  de  $f$  suivant les normales sont homotopes à zéro dans les feuilles  $L_s$ . Ainsi  $f$  est homotope à zéro dans  $M^n$  et  $f$  définit alors une "sphère évanouissante" de dimension  $q$ . Il n'est pas toujours vrai qu'une sphère évanouissante soit homotope à zéro dans la feuille qui la contient. Par exemple, si on considère la composante de Reeb  $S^1 \times D^{n-1}$  de dimension  $n$ , une  $(n-2)$ -sphère  $\{\theta\} \times S^{n-2}$  de la feuille compacte  $S^1 \times S^{n-2}$  est évanouissante.

### 3. Sur le théorème de A. Denjoy pour les feuilletages.

Dans ce paragraphe nous n'étudions que des feuilletages tangents au bord lorsque la variété possède un bord. Il serait facile de voir que la plupart des résultats obtenus se généralisent au cas des feuilletages transverses au bord. Le théorème suivant que nous allons montrer est un complément du théorème 1.1.III et une généralisation du théorème de A. Denjoy [1] pour certains feuilletages.

Théorème 1.3. Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage d'une variété compacte  $M^n$ , de codimension 1, transversalement orientable, de classe  $r \geq 2$  qui vérifie les conditions A et B. Si pour toute feuille  $L_0$  compacte, isolée d'un côté au moins dans l'ensemble des feuilles compactes de  $\mathcal{F}$ , l'injection  $i_{L_0} : L_0 \hookrightarrow M^n$  induit un homomorphisme surjectif  $i_{L_0*} : H_1(L_0) \rightarrow H_1(M)$ , le feuilletage  $\mathcal{F}$  est presque sans holonomie et il n'a pas de feuilles exceptionnelles.

La démonstration de ce théorème nécessite les lemmes suivants :

Lemme 1.3. Soit  $V^n$  une variété (non nécessairement compacte) munie d'un feuilletage  $\mathcal{F}$  de codimension 1, orienté, de classe  $r \geq 2$ . Si toute transversale fermée de  $\mathcal{F}$  coupe toutes les feuilles de  $\mathcal{F}$  et si  $\mathcal{F}$  vérifie les conditions A et B il a une holonomie nulle.

Démonstration : Supposons que  $\mathcal{F}$  n'a pas une holonomie nulle et soit  $\alpha$  un lacet dans une feuille  $L$  de  $V^n$  (en un point  $a$ ) qui représente un élément de  $\pi_1(L, a) - N(L^+, a)$ . Il existe un difféomorphisme local d'holonomie positive

$$f_\alpha : [0, \varepsilon] \rightarrow R^+ \text{ et } s \in [0, \varepsilon] \text{ tel que } f_\alpha(s) = s' \neq s.$$

Par la même méthode que dans le lemme 3.1., on construit une transversale fermée  $\tau_{\alpha, s}$  au point  $n_a(s)$ , homotope (librement) au lacet  $\alpha$  dans  $L$ . Or d'après le lemme 2.1 cette transversale ne peut pas couper la feuille  $L$ , puisqu'elle est homologue à un lacet dans  $L$ .

Lemme 2.3. Soient  $\mathcal{F}$  un feuilletage d'une variété compacte,  $M^n$ , qui vérifie les conditions du théorème 1.3 et  $L_0$  une feuille compacte de  $\mathcal{F}$ .

i) Le groupe d'holonomie positive  $G(L_0^+, a)$  en un point  $a$  de  $L$  est abélien libre.

ii) Si  $L_0^+$  est isolée dans l'ensemble des feuilles compactes :

-  $G(L_0^+, a)$  est un sous-groupe archimédien de  $\mathcal{G}^r$ .

- L'ensemble des feuilles non compactes de  $\mathcal{F}$  qui sont adhérentes à  $L_0$  du côté positif est une sous-variété ouverte  $V^n$  de  $M^n$ .

- Un lacet  $\alpha$  en un point  $b$  de  $V^n$ , homologue à un lacet dans  $L_0$ , est homotope avec point base  $b$  soit à un lacet dans la feuille qui passe par  $b$ , soit à une transversale fermée de  $\mathcal{F}$  contenue dans  $V^n$  qui coupe toutes les feuilles de  $\mathcal{F}$  contenues dans  $V^n$ .

Des résultats plus précis encore peuvent être déduits du théorème 2.3. qui suit lorsque la feuille  $L_0^+$  n'est pas isolée dans l'ensemble des feuilles compactes.

Démonstration : i) Soit  $\alpha_0$  un lacet en  $a$  dans  $L_0$  qui représente un élément de  $C(L_0, a)$  (le sous-groupe des commutateurs de  $\pi_1(L_0, a)$ ). Supposons que  $\alpha_0$  n'appartient pas à  $N_1(L_0^+, a)$  et soient respectivement :

$$f_{\alpha_0} : [0, \varepsilon] \longrightarrow \mathbb{R}^+ , \quad s \in (0, \varepsilon) \quad \text{tel que} \quad f_{\alpha_0}(s) = s' \neq s$$

un difféomorphisme local d'holonomie correspondant à  $\alpha_0$  et un point non fixe de  $f_{\alpha_0}$ . Désignons par  $\tau_{\alpha_0, s}$  la transversale fermée passant par  $n_a(s)$  construite par la méthode du lemme 3.1. D'après le théorème de stabilité  $\tau_{\alpha_0, s}$  coupe au moins une feuille non compacte et puisque  $\tau_{\alpha_0, s}$  est homologue à zéro (homotope librement à  $\alpha_0$ ) ceci contredit le lemme 2.1. Le point i) est ainsi démontré.

ii) Si  $L_0^+$  est isolée dans des feuilles compactes, il est clair que  $V^n$  est une sous-variété ouverte de  $M^n$ . De plus  $G(L_0^+, a)$  étant abélien, c'est un sous-groupe archimédien de  $\mathcal{G}^r$  d'après le théorème 1.3. Soit  $\alpha$  un lacet en  $b \in V^n$ . Il est homologue à un lacet  $\alpha_0$  en  $a$  dans  $L_0$ . Reprenons les notations du début de la démonstration du lemme pour l'élément  $f_{\alpha_0} : [0, \varepsilon] \longrightarrow \mathbb{R}^+$  de  $P(L_0^+, a)$ . Puisque

$G(L_0^+, a)$  est archimédien deux cas peuvent se présenter :

-  $f_{\alpha_0}$  n'a pas de point fixe. En un point  $n_a(s)$  de  $L$  (où  $s \in (0, \epsilon)$ ) on construit la transversale fermée  $\tau_{\alpha_0, s}$  qui coupe les mêmes feuilles que le segment de normale  $n_a / [f_{\alpha_0}(s), s]$  (si  $f_{\alpha_0}$  est contractant elle est positive dans l'autre cas négative). Ainsi  $\tau_{\alpha_0, s}$  est une transversale fermée qui coupe toutes les feuilles de  $V^n$ . Soit  $\beta$  un chemin dans  $L_s$  qui joint  $n_a(s)$  au point  $b$ . Puisque  $L_s$  n'est pas compacte et que  $\tau_{\alpha_0, s}$  est homologue à  $\alpha_0$  donc à  $\alpha$ , il existe un lacet  $c$ , en  $b$ , dans  $L_s$ , tel que  $\beta^{-1} \cdot \tau_{\alpha_0, s} \cdot \beta \cdot c$  soit homotope avec point base  $b$  à  $\alpha$ .

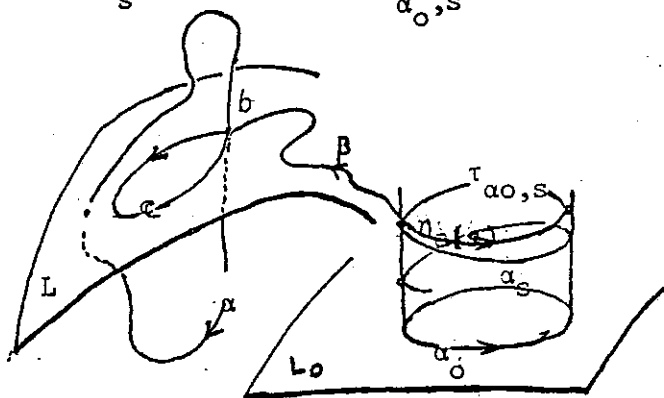


Figure 1.3.

Le résultat est alors une conséquence du lemme 1.3.I. (Figure 1.3.)

-  $f_{\alpha_0}$  est l'application identique. Alors  $\alpha_s$  est un lacet dans  $L$ . Ce relèvement de  $\alpha_0$  suivant les normales de hauteur  $s$ , permet de construire un lacet  $\alpha'$  dans  $L$ , homotope avec point base  $b$  à  $\alpha_0$ .

Avec les mêmes hypothèses que dans le théorème 1.3., on a :

Lemme 3.3. Soit  $L_0^+$  une feuille compacte isolée dans l'ensemble des feuilles compactes ( $i_{L_0^*}: H_1(L_0) \rightarrow H_1(M)$  est surjective). Un point  $a$  appartenant à  $L_0$  étant fixé, il existe  $\epsilon > 0$  tel que à tout couple de réels  $s, s' \in (0, \epsilon)$  est associé un difféomorphisme local d'holonomie positive en  $a$  qui applique  $s$  sur  $s'$  lorsque  $n_a(s)$  et  $n_a(s')$  appartiennent à une même feuille  $L_s$ .

C'est à dire que la trace d'une feuille  $L_s \subset V^n$  passant par  $n_a(s)$  ( $s \in (0, \varepsilon)$ ) sur  $n_a([0, \varepsilon])$  est l'image par  $n_a$  de l'orbite de  $s$  par le pseudo-groupe  $P(L_0^+, a)$ .

Remarque 1.3. Le résultat établi dans ce lemme est analogue à celui que nous avons obtenu pour les feuilletages sans holonomie transverses au bord dans le théorème 1.3.II. Cette analogie est étudiée dans la remarque 2.1.IV pour des variétés de dimension trois.

Démonstration : Soient  $\alpha$  un lacet en  $a$  dans  $L_0$  tel que le difféomorphisme local d'holonomie correspondant  $f_\alpha : [0, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}$  est contractant,  $b = n_a(s)$  et  $b' = n_a(s')$  deux points d'une feuille  $L_s \subset V^n$  où  $s' < s$  appartiennent à  $(0, \varepsilon)$ ,  $\gamma$  un chemin dans  $L_s$  qui joint  $b$  à  $b'$ . Puisque  $i_{L_0}$  est surjective, le lacet  $\gamma.(n_a/[s', s])$  est homologue à un lacet  $\beta$  au point  $a$  dans  $L_0$ . (Figure 2.3).

Soit  $f_\beta : [0, \varepsilon'] \rightarrow \mathbb{R}$  un difféomorphisme local d'holonomie positive associé à  $\beta$ . Puisque  $f_\alpha$  est contractant, il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $f_\alpha^n(s) = s_1 \in (0, \varepsilon^n)$ . Soient  $\alpha_s^n$  et  $\alpha_{s'}^n$ , les relèvements suivant les normales du lacet  $\alpha^n$  ( $\alpha^n = \alpha^{n-1} \cdot \alpha$ ) de hauteur  $s$  et  $s'$ . Ils ont pour extrémités :

$$b_1 = n_a(s_1), b'_1 = n_a(s'_1) \text{ avec } s_1 = f_\alpha^n(s) \text{ et } s'_1 = f_\alpha^n(s').$$

Le lacet  $\beta$  possède un relèvement suivant les normales  $\beta_{s_1}$  de hauteur  $s_1$ . Soit alors

$$b''_1 = n_a(s''_1) \text{ si } s''_1 = f_\beta(s_1)$$

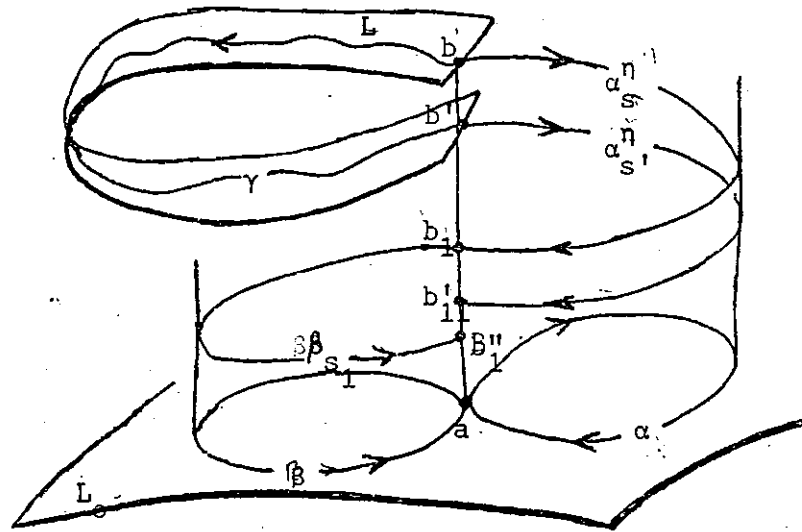
Pour montrer le lemme, il suffit de montrer que  $s'_1$  et  $s''_1$  sont égaux car s'il en est ainsi :

$$s' = f_\alpha^{-n}(s'_1) = f_\alpha^{-n}(f_\beta(s_1)) = f_\alpha^{-n} \cdot f_\beta \cdot f_\alpha^n(s).$$

Par construction du relèvement suivant les normales, le lacet (voir la figure 2.3)

$$(\alpha_s^n)^{-1} \cdot \gamma \cdot \alpha_{s'}^n \cdot (n_a/[s'_1, s_1]) = \gamma' \cdot n_a/[s'_1, s_1]$$

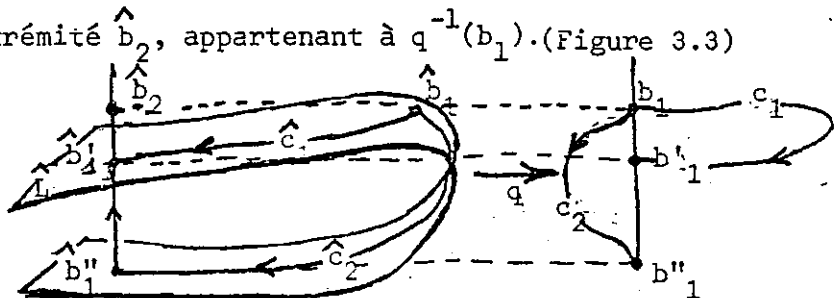
Figure 2.3.



est homologue à  $\gamma \cdot (n_a / [s', s])$ . Puisque  $L_s$  est une feuille non compacte, il existe un lacet  $c$  dans  $L_s$  au point  $b_1$  tel que  $c \cdot \gamma' \cdot n_a / [s'_1, s_1]$  est homotope avec point base  $b_1$  à  $\beta_{s_1} \cdot n_a / [s''_1, s_1]$  (puisque ces deux lacets sont homologues à  $\beta$ ). Notons  $c_1$  et  $c_2$  respectivement les chemins  $c \cdot \gamma'$  et  $\beta_{s_1}$  dans  $L_s$  et  $b'_1 b_1$  et  $b''_1 b_1$  les segments de normales  $n_a / [s'_1, s_1]$  et  $n_a / [s''_1, s_1]$ . On peut supposer par exemple que  $s''_1 < s'_1 < s_1$ . (On ne peut avoir  $s_1 = s''_1$  car  $\beta$  est homologue à une transversale fermée).

Soient  $q : \hat{M} \rightarrow M$  le revêtement universel de  $M$ ,  $\hat{\mathcal{F}}$  le feuilletage image réciproque de  $\mathcal{F}$  par  $q$ ,  $\hat{b}_1$  un point de  $q^{-1}(b_1)$ ,  $\hat{c}_1$  et  $\hat{c}_2$  les relèvements respectifs de  $c_1$  et  $c_2$  d'origine  $\hat{b}_1$ . A partir des extrémités  $\hat{b}'_1$  et  $\hat{b}''_1$  (respectives) de ces deux derniers chemins on construit les relèvements des segments de normales  $b'_1 b_1$  et  $b''_1 b_1$ . Puisque  $c_1 \cdot (b'_1 b_1)$  et  $c_2 \cdot (b''_1 b_1)$  sont homotopes, ces deux derniers relèvements ont la même extrémité  $\hat{b}_2$ , appartenant à  $q^{-1}(b_1)$ . (Figure 3.3)

Figure 3.3



Si, sur  $\hat{M}$  on choisit la métrique riemannienne image réciproque par  $q$  de celle de  $M^n$ , les points  $\hat{b}'_1, \hat{b}''_1, \hat{b}_1$  étant sur un même arc de normale de  $\mathcal{F}$ , les points  $\hat{b}''_1, \hat{b}'_1, \hat{b}_2$  sont aussi sur un même arc de normale de  $\hat{\mathcal{F}}$ . Désignons par  $\hat{b}''_1 \hat{b}'_1$  l'arc de normale qui joint  $\hat{b}''_1$  à  $\hat{b}'_1$  (positif puisque  $s''_1 < s'_1$ ). Le lacet  $\hat{c}_1^{-1} \cdot \hat{c}_2^{-1} \cdot (\hat{b}''_1 \hat{b}'_1)$  est homotope avec point base  $\hat{b}'_1$  à une transversale fermée  $\hat{\tau}$  de  $\hat{\mathcal{F}}$  (Lemme 1.4.I). Son image  $\tau = q \circ \hat{\tau}$  par  $q$  est une transversale fermée de  $\mathcal{F}$  homotope à zéro. Or ceci contredit la condition A d'après la proposition 1.2.I. On en déduit que  $s''_1$  et  $s'_1$  sont égaux.

Rassemblons les résultats fournis par les lemmes précédents dans la proposition suivante :

Proposition 1.3. Soit  $L_0$  une feuille compacte d'un feuilletage  $\mathcal{F}$  vérifiant les conditions A et B, de codimension 1, de classe  $r \geq 2$ , transversalement orientable, d'une variété compacte  $M^n$ . Si  $L_0^+$  est isolée dans l'ensemble de feuilles compactes de  $\mathcal{F}$  et si  $i_{L_0^*} : H_1(L_0) \rightarrow H_1(M)$  est surjective alors la sous-variété  $V^n$  réunion des feuilles non compactes qui contiennent  $L_0^+$  dans leur adhérence possède les propriétés suivantes :

1)  $V^n$  est l'intérieur d'une composante orientée  $c$  non triviale dont le bord est une réunion de feuilles compactes  $L_p$ ,  $p = 0, 1, \dots, r$ , ( $L_0$  étant l'une d'elle).

2) Quel que soit  $a$  appartenant à  $V^n$ , un élément de  $\pi_1(M^n, a) - \pi_1(L, a)$  ( $L$  désignant la feuille qui passe par  $a$ ) est représentable par une transversale fermée de  $\mathcal{F}$  qui coupe toutes les feuilles de  $V^n$ .

3) Les groupes d'holonomie  $G(L_p^i)$  des feuilles de  $\partial c$  sont abéliens libres (archimédiens),  $i$  désignant le côté où se trouve  $V^n$  par rapport à  $L_p$ . De plus  $G(L_0^+)$  est isomorphe à  $\pi_1(M, a) / \pi_1(L, a)$  quel que soit le point  $a$  de  $V^n$ .

4) Les feuilles de  $V^n$  ont une holonomie nulle ; elles sont localement partout denses dans  $M^n$  si  $G(L_0^+)$  est de dimension supérieure ou égale à 2, dans le cas contraire elles sont propres.

Démonstration : Le point 2) est une conséquence du lemme 2.3. puisque tout lacet en un point  $a$  de  $V^n$  est homologue à un lacet dans  $L_0$ .

Soit  $\tau$  une transversale fermée de  $\mathcal{F}$  qui coupe une feuille  $L$  de  $V^n$  en  $a$ . De 2) on déduit que  $\tau$  est homotope avec point de base  $a$  à une transversale fermée  $\tau'$  dont le saturé de l'image est  $V^n$  ; d'après le corollaire 2.4.I,  $\tau$  coupe les mêmes feuilles que  $\tau'$ .

Démontrons 1) Soit  $L_p$  une feuille contenue dans la frontière de  $V^n$ . Si une transversale fermée de  $\mathcal{F}$  la coupait, elle appartiendrait à  $V^n$ . Ainsi aucune transversale fermée ne la coupe et  $L_p$  est une feuille appartenant au bord d'une composante orientée non triviale  $C$ .

Le point 3) est une conséquence immédiate du lemme 2.3. et de sa démonstration puisque  $i_{L_0^*}$  est surjective.

Démontrons 4) Toute transversale fermée du feuilletage induit par  $\mathcal{F}$  sur  $V^n$  coupe toutes les feuilles de  $V^n$ . D'après le lemme 1.3. ce feuilletage a une holonomie nulle. Puisque  $V^n$  est une sous-variété ouverte de  $M^n$ , toute feuille de  $V^n$  a une holonomie nulle (pour  $\mathcal{F}$ ). Si  $G(L_0^+)$  possède deux générateurs indépendants au moins, on a vu dans le théorème 1.3.I que les feuilles de  $V^n$  sont localement denses dans  $M^n$ . Dans le cas contraire, le groupe d'holonomie positive en  $a_0 \in L_0^+$  est cyclique et ainsi l'orbite d'un point voisin de 0 par  $P(L_0^+, a_0)$  est discrète (Théorème 1.1.I). D'après le lemme 3.3., la trace d'une feuille de  $V^n$  sur un arc de normale  $n_{a_0} : [0, \varepsilon] \rightarrow M^n$  est l'image par  $n_{a_0}$  de l'orbite d'un point de  $\mathbb{R}$  par  $P(L_0^+, a_0)$ . Elle est donc discrète et la feuille correspondante est propre.

Démonstration du théorème 1.3. Si  $L$  est une feuille non compacte de  $\mathcal{F}$ . Elle contient au moins une feuille compacte (isolée)  $L_0$  dans son adhérence. D'après la proposition précédente  $L$  a une holonomie nulle et elle est propre ou localement partout dense.

Le théorème suivant est un autre exemple d'application de la proposition 1.3..Il généralise certains résultats obtenus par G.Reeb dans [15] .

Théorème 2.3. Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage vérifiant les conditions A et B, de codimension 1, transversalement orientable, de classe  $r \geq 2$ , d'une variété compacte  $M^n = M^{n-1} \times [0,1]$  dont les seules feuilles compactes sont  $M^{n-1} \times \{0\}$  et  $M^{n-1} \times \{1\}$   
Alors :

1. Le feuilletage  $\mathcal{F}$  est presque sans holonomie.
2. Quel que soit  $a$  appartenant à l'intérieur de  $M^n$ , tout élément de  $\pi_1(M^n, a) - \pi_1(L, a)$  est représentable par une transversale fermée qui coupe toutes les feuilles non compactes de  $\mathcal{F}$ .
3. Les groupes d'holonomie  $G_0$  et  $G_1$  (respectivement) de  $M^{n-1} \times \{0\}$  et  $M^{n-1} \times \{1\}$  sont des sous-groupes archimédiens de  $\mathcal{G}^r$  isomorphes à  $\pi_1(M, a) / \pi_1(L, a)$  quel que soit  $a \in M^{n-1} \times [0,1]$ .
4. Si  $G_0$  (  $G_1$  ) est isomorphe à  $\mathbb{Z}$  les feuilles non compactes de  $\mathcal{F}$  sont propres, toutes difféomorphes et chacune d'elles contient les deux bords dans son adhérence. Dans le cas contraire elles sont denses dans  $M^n$ .

Démonstration : Montrons tout d'abord que toute feuille non compacte de  $\mathcal{F}$  contient les deux bords de  $M^n$  dans son adhérence. Soient  $V_0^n$  et  $V_1^n$  les sous variétés ouvertes de  $M^n$  réunion des feuilles non compactes qui contiennent  $M^{n-1} \times \{0\}$  et  $M^{n-1} \times \{1\}$  (respectivement) dans leur adhérence. D'après le théorème 1.1.,  $V_0^n, V_1^n$  est un

recouvrement ouvert de  $M^n \times (0,1]$ . Ainsi il existe une feuille  $L$  de  $\mathcal{F}$  qui contient les deux bords dans son adhérence. Une transversale fermée qui coupe  $L$ , coupe d'après le théorème précédent toutes les feuilles de  $V_0^n$  et  $V_1^n$  et alors  $V_0^n = V_1^n = M^n \times (0,1)$ . Les points 1)2)3) sont alors une conséquence de ce résultat et de la proposition précédente.

Puisque toute transversale fermée de  $\mathcal{F}$  coupe toutes les feuilles non compactes de  $\mathcal{F}$ , lorsque ces feuilles sont localement partout denses dans  $M^n$ , elles sont nécessairement partout denses dans  $M^n$ .

Pour achever la démonstration il nous suffit de montrer que lorsque les feuilles de  $\mathcal{F}$  sont propres ( $G_0 \approx G_1 \approx \mathbb{Z}$ ), les feuilles non compactes sont toutes difféomorphes. Soit  $L$  une feuille de  $\mathcal{F}$  et  $a$  un point quelconque de  $L$ . La  $1/2$  trajectoire  $n_a^+$  positive, passant par  $a$ , du champ  $X$  normal à  $\mathcal{F}$  est soit :

i) difféomorphe à un segment  $[0,1]$ , alors elle coupe un des bords de  $M^n$ .

Puisque toute feuille non compacte de  $\mathcal{F}$  contient les deux bords dans son adhérence, elle recoupe  $L$  en un point  $a_1 \neq a$ .

ii) difféomorphe à  $[0, \infty)$  alors elle possède au moins un point limite  $b$  appartenant à l'intérieur de  $M^n$ . Si  $L'$  est la feuille qui passe par  $b$ ,  $n_a^+$  coupe  $L'$  en deux points distincts au moins,  $b_1 = n_a(s_1)$  et  $b_2 = n_a(s_2)$ . Soit alors  $\tau$  une transversale fermée construite par la méthode du lemme 1.4.I passant par  $b_1$ , qui coupe les mêmes feuilles que  $n_a/[s_1, s_2]$ .  $\tau$  coupe toutes les feuilles non compactes. Ainsi  $n_a([0, \infty))$  recoupe  $L$  en un point  $a_1$  distinct de  $a$ .

iii) difféomorphe à  $S^1$ , c'est alors une transversale fermée.

Dans les trois cas on peut définir :  $s_a = \inf \{ s/s > 0, n_a(s) \in L \}$  ( $n_a(s_a)$  est le premier point de retour sur  $L$  de la  $1/2$ -trajectoire). Une transversale fermée construite à partir du segment  $n_a([0, s_a])$  coupe toutes les feuilles non compactes de  $\mathcal{F}$  (les mêmes que ce segment). Ainsi  $L'$  étant une feuille fixée de  $\mathcal{F}$  on peut définir :

$$s'_a = \inf \{s / 0 \leq s \leq s_a \text{ et } n_a(s) \in L'\} \quad \text{et}$$

$$h_{L'} : L \longrightarrow L' \text{ tel que } h_{L'}(a) = n_a(s'_a).$$

$h_{L'}$  est localement un difféomorphisme et c'est une application injective. Mais toute 1/2 normale négative issue de  $L'$  coupe  $L$  (pour les mêmes raisons) et ainsi  $h_{L'}$  est surjective.

Remarque 2.3. Dans le cas où les feuilles sont denses il est vraisemblable qu'elles soient aussi difféomorphes entre elles. Il est facile de voir qu'elles ont des groupes fondamentaux isomorphes. Lorsque le feuilletage est transverse au facteur  $I$  on sait que les feuilles sont des revêtements de  $M^{n-1}$  et on peut penser que ce résultat est vrai si les feuilles non compactes sont denses. Dans le cas particulier où  $M^{n-1} = T^{n-1}$  on va montrer un résultat plus faible encore :

Corollaire 1.3. Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage sans cycle évanouissant non trivial de  $T^{n-1} \times \{I\}$ , de classe  $r \geq 2$ , transversalement orientable dont les seules feuilles compactes sont  $T^{n-1} \times \{0\}$  et  $T^{n-1} \times \{1\}$ . Pour  $n = 3$  et  $n \geq 7$  si  $G_0 (\cong G_1)$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$ , une feuille  $L$  non compacte à deux bouts qui possèdent des voisinages colliers  $V_0$  et  $V_1$ , difféomorphes à  $T^{n-2} \times (0, \infty)$  qui contiennent respectivement  $T^{n-1} \times \{0\}$  et  $T^{n-1} \times \{1\}$  dans leur adhérence et  $L - V_1 \cup V_2$  est compacte.

Démonstration : Soit  $a$  un point de  $T_0^{n-1} = T^{n-1} \times \{0\}$ . Puisque  $N(T_0^{n-1}, a)$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}^{n-2}$ , il existe un plongement  $f : T^{n-2} \longrightarrow T_0^{n-1}$  dont l'image est la fibre en  $a$  d'une fibration de  $T_0^{n-1}$  telle que

$$f_{\#}(\pi_1(T^{n-2}, x_0)) = N(T_0^{n-1}, a).$$

Appliquons à  $f$  le théorème 1.2.I. Il existe une application de relèvement de  $f$  :

$$F : T^{n-2} \times [0, \varepsilon] \longrightarrow T^{n-1} \times [0, 1] \quad \text{et soit,}$$

Soit alors  $f_s : T^{n-2} \times \{s\} \rightarrow L_s$ , l'application partielle  $x \rightarrow f_s(x, s) = F(x, s)$

où  $L_s$  désigne la feuille passant par  $n_a(s)$ .

En utilisant le lemme 1.3.I on peut encore préciser ce relèvement. En effet, en choisissant  $\epsilon$  suffisamment petit  $f_s(T^{n-2})$  est inclus dans une feuille  $\ell_s$  du feuilletage  $\mathcal{F}_\phi$  (notation du lemme 1.3.I). Dans la suite on suppose que  $f_s : T^{n-2} \rightarrow \ell_s$

Montrons que  $T_s^{n-2} = f_s(T^{n-2})$  disconnecte  $\ell_s$ . S'il n'en est pas ainsi, il existe un plongement  $\alpha_s : S^1 \rightarrow \ell_s$  transverse à  $T_s^{n-2}$  qui ne coupe ce tore qu'au point  $n_a(s)$  et  $\alpha_s$  n'est pas homotope à un lacet dans  $T_s^{n-2}$ . Puisque  $\alpha_s(S^1)$  est inclus dans  $\ell_s$ ,  $\alpha_s$  se projette suivant les normales sur  $T_0^{n-1}$  en un lacet  $\alpha : S^1 \rightarrow T_0^{n-1}$ .

Or  $\alpha$  se relève suivant les normales à la hauteur  $s$  en le lacet  $\alpha_s$ . Ainsi  $\alpha$  représente un élément de  $N(T_0^{n-1}, a) = f_{\#}(\pi_1(T^{n-2}, x_0))$  et puisque  $\alpha_s$  est homologue à  $\alpha$ ,  $\alpha_s$  est homologue à un lacet dans  $T_s^{n-2}$ , ce qui contredit l'hypothèse initiale,  $[\alpha_s] \notin \pi_1(T_s^{n-2})$ .

Soit  $g$  un difféomorphisme local d'holonomie contractant qui correspond au générateur de  $G_0 : g : [0, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^+$ . Il existe une composante connexe  $V_s$  de  $\ell_s - T_s^{n-2}$  qui contient l'ensemble des points  $\{n_a(s_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  si  $s_n = g^n(s)$ . En ces points on a les relèvements  $f_{s_n} : T^{n-2} \rightarrow \ell_{s_n} = \ell_s$ . Les images  $T_{s_n}^{n-2}$  de ces plongements sont disjointes dans  $V_s$  et ainsi

$$V_{s_n} \subset V_{s_{n-1}} \subset \dots \subset V_s$$

où  $V_{s_n}$  désigne la composante connexe de  $\ell_s - T_{s_n}^{n-2}$  qui contient  $n_a(s_{n+1})$ . La famille  $\{V_{s_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  définit un bout de  $\ell_s$  donc de  $L_s$ . D'autre part l'injection de  $T_{s_n}^{n-2}$  dans  $V_{s_n}$  induit un isomorphisme des groupes fondamentaux.

Montrons maintenant que  $V_{s_n}$  est homotopiquement équivalent à  $T_{s_n}^{n-2}$ . Soit  $h_{s_n} : S^q \rightarrow V_{s_n}$  où  $q \geq 2$ . La projection suivant les normales de  $h_{s_n}$  dans  $T_0^{n-1}$  est homotope à une application constante. Dès que  $s_n$  est suffisamment petit (c'est à dire  $n$  grand) on peut relever cette homotopie dans  $V_{s_n}$  (Corollaire 1.1.I).

Ainsi  $\pi_q(V_s)$  est nul pour  $q \geq 2$ . D'après un résultat de [25],  $V_s$  est difféomorphe à  $T^{n-2} \times (0, \infty)$  pour  $n \geq 7$ ; pour  $n = 3$  le résultat est encore naturellement vrai.

Puisque  $V_s$  contient tous les points de la trace de  $L_s$  sur  $n_a([0, s])$  (lemme 3.3),  $L_s - V_s$  ne contient pas  $T_0^{n-1}$  dans son adhérence. Si  $V'_s$  est un collier dans  $L_s$  obtenu de la même façon à partir de  $T^{n-1} \times \{1\}$ ,  $L_s - V_s \cup V'_s$  a pour adhérence le compact  $L_s - V_s \cup V'_s$  puisque  $L_s$  est une feuille propre de  $\mathcal{F}$ .

#### 4. Application aux actions de $\mathbb{R}^{n-1}$ sur $T^n$ .

Un feuilletage  $\mathcal{F}$  de  $T^{n-1} \times I$  (où  $T^n$ ) défini par une action localement libre de  $\mathbb{R}^{n-1}$ , de classe  $r \geq 2$ , ne possède pas de cycles évanouissants non trivial [8], (1), ainsi il vérifie les conditions A, B. On en déduit la proposition suivante.

Proposition 1.4. Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage de  $T^{n-1} \times I$  défini par une action localement libre de  $\mathbb{R}^{n-1}$ , de classe  $r \geq 2$ , dont  $T^{n-1} \times \{0\}$  et  $T^{n-1} \times \{1\}$  sont les seules feuilles compactes. Alors :

- i) Le feuilletage  $\mathcal{F}$  est presque sans holonomie
- ii) Les groupes d'holonomies  $G_i$  de  $T^{n-1} \times \{i\}$ ,  $i = 0, 1$ , sont isomorphes à  $\mathbb{Z}^p$  ( $p \in \mathbb{N}$ ).
- iii) Les feuilles de  $\mathcal{F}$  situées dans  $T^{n-1} \times (0, 1)$  sont difféomorphes à  $T^{n-p-1} \times \mathbb{R}^p$  pour  $p \leq n-1$ ; elles sont propres si  $p \leq 1$ , elles sont denses dans  $T^{n-1} \times I$  si  $p \geq 2$ .

Démonstration : Les propriétés i) et ii) sont des conséquences immédiates du théorème 2.3.. Le point iii) de ce même théorème entraîne que le groupe fondamental

(1) R. Roussarie a trouvé une démonstration très simple de cette propriété.

d'une feuille située dans  $T^{n-1} \times (0,1)$  est  $\mathbb{Z}^{n-p-1}$  si le groupe d'holonomie d'une composante du bord est isomorphe à  $\mathbb{Z}^p$  ( $\pi_1(T^{n-1} \times I) \simeq G_1 \oplus \pi_1(L)$ ). Or une telle feuille étant un revêtement de  $T^{n-1}$ , elle est difféomorphe à  $T^{n-p-1} \times \mathbb{R}^p$ .

Plus généralement les actions de  $\mathbb{R}^{n-1}$  sur  $T^n$  et  $T^{n-1} \times I$  sont classées par le théorème suivant :

Théorème 1.4. Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage de  $T^n$  (ou  $T^{n-1} \times I$ ) défini par une action localement libre de  $\mathbb{R}^{n-1}$  de classe  $r > 2$ . Alors si  $\mathcal{F}$  n'a pas de feuille compacte, c'est un feuilletage sans holonomie. Dans le cas contraire et pour  $n \geq 6$ ,  $\mathcal{F}$  est un feuilletage presque sans holonomie qui ne possède pas de feuille exceptionnelle et il existe un difféomorphisme  $h$  de  $T^n$  (ou de  $T^{n-1} \times I$ ) isotope à l'identité et un fermé  $A$  de  $S^1$  (ou de  $I$ ) tels que :

i) les feuilles compactes de  $h(\mathcal{F})$  sont des fibres  $T^{n-1} \times \{\theta\}$  de  $T^n = T^{n-1} \times S^1$  (ou de  $T^{n-1} \times I$ ), avec  $\theta$  appartenant à  $A$ .

ii) Si  $I_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , désigne l'ensemble des intervalles ouverts deux à deux disjoints dont la réunion est  $S^1 - A$  (ou  $I - A$ ),  $h(\mathcal{F})$  induit sur  $T^{n-1} \times I_k$  un feuilletage du type décrit dans la proposition précédente.

Les deux lemmes qui suivent seront utilisés pour construire le difféomorphisme  $h$  qui intervient dans le théorème.

Lemme 1.4. Soit  $i : T^n \hookrightarrow T^n \times I$ , un plongement de  $T^n$  dans  $T^n \times I$ . Si  $n \geq 5$  et si l'homomorphisme  $i_{\#} : \pi_1(T^n) \rightarrow \pi_1(T^n \times I)$  est injectif,  $i(T^n)$  décompose  $T^n \times I$  en deux cobordismes  $(T^n \times \{0\}, M_0, i(T^n))$ ,  $(i(T^n), M_1, T^n \times \{1\})$  et ces cobordismes sont triviaux.

Démonstration : On va tout d'abord montrer que ce lemme est vrai lorsque  $i_{\#}$  est

un isomorphisme et ensuite on en déduira le résultat lorsque  $i_{\#}$  est seulement injectif.

Désignons par  $T'^n$  l'image de  $i$  et montrons que tout chemin qui joint un point de  $T^n \times \{0\}$  à un point de  $T^n \times \{1\}$  coupe  $T'^n$ . Soient  $p$  la projection de  $T^n \times I$  sur  $T^n \times \{0\}$  suivant le facteur  $I$  et  $p'$  sa restriction à  $T'^n$ . Puisque  $i_{\#}$  est un isomorphisme  $p'$  est une homotopie équivalence. Ainsi  $p'_{\#} : H_n(T'^n) \rightarrow H_n(T^n \times \{0\})$  est un isomorphisme et on en déduit immédiatement que  $p'$  est une application surjective. Un point  $a$  de  $T^n$  étant fixé, on peut toujours supposer (à une isotopie près) que le nombre de points de  $\{a\} \times I \cap T'^n$  est exactement le nombre d'intersection  $[\{a\} \times I, T'^n]$ . Un chemin  $\omega$  reliant  $T^n \times \{0\}$  à  $T^n \times \{1\}$  est homotope relativement au bord à  $\{a\} \times I$ . Ainsi  $[\omega(I), T'^n]$  n'est pas nul et (pour  $n \geq 5$ )  $T'^n$  décompose  $T^n \times I$  en deux cobordismes  $C_0 = (T^n \times \{0\}, M_0, T'^n)$  et  $C_1 = (T'^n, M_1, T^n \times \{1\})$ .

Désignons par  $q : \mathbb{R}^n \times I \rightarrow T^n \times I$  le revêtement universel de  $T^n \times I$ . Puisque  $i_{\#}$  est un isomorphisme ( $\pi_1(T'^n) = \pi_1(T^n \times I)$ ), l'image réciproque de  $T'^n$  par  $q$  est un  $n$ -plan  $\widehat{T}^n$ . Les images réciproques de  $C_0$  et  $C_1$  sont des cobordismes  $\widehat{C}_0 = (\mathbb{R}^n \times \{0\}, \widehat{M}_0, \widehat{T}^n)$  et  $\widehat{C}_1 = (\widehat{T}^n, \widehat{M}_1, \mathbb{R}^n \times \{1\})$ . Appliquons le théorème de Von Kampen à  $\mathbb{R}^n \times I = \widehat{M}_0 \cup \widehat{M}_1$ .

$$\{0\} = \pi_1(\mathbb{R}^n \times I) = \pi_1(\widehat{M}_0) * \pi_1(\widehat{M}_1)$$

Ainsi  $\widehat{M}_0$  et  $\widehat{M}_1$  sont simplement connexes. D'autre part en appliquant la suite exacte de Mayer-Vietoris à  $\widehat{M}_0 \cup \widehat{M}_1$  on obtient :

$$H_q(\widehat{M}_0) = H_q(\widehat{M}_1) = H_q(\widehat{T}^n) = 0 \quad \text{pour } q \geq 2.$$

D'un théorème de Whitehead on déduit que

$$\pi_q(\widehat{M}_0) = \pi_q(\widehat{M}_1) = \pi_q(\widehat{T}^n) = 0 \quad \text{pour } q \geq 1.$$

Ainsi le plongement  $i_k : T'^n \hookrightarrow M_k$ ,  $k = 0, 1$ , induit pour tout  $q \in \mathbb{N}$  un isomorphisme de  $\pi_q(T'^n)$  sur  $\pi_q(M_k)$ . C'est une homotopie équivalence. Alors, les deux cobordismes  $C_0$  et  $C_1$  sont des S-cobordismes et (pour  $n \geq 5$ ) ils sont triviaux.

Il nous reste à montrer que  $i_{\#}$  est nécessairement surjectif s'il est injectif. Désignons par  $G$  le groupe quotient  $\pi_1(T^n \times I)/\pi_1(T'^n)$ . C'est un groupe fini de torsion. Soit  $q : \widetilde{T^n \times I} \rightarrow T^n \times I$  le revêtement associé à l'inclusion  $\pi_1(T'^n) \hookrightarrow \pi_1(T^n \times I)$ . Si  $G$  possède  $r$  éléments, l'image réciproque de  $T'^n$  par  $q$  est une réunion de  $r$  tores  $T_k^n$ ,  $k = 0, 1, \dots, r$ . Puisque  $G$  est le groupe des automorphismes de ce revêtement, quel que soit  $k$ , le plongement  $i_k : T_k^n \hookrightarrow \widetilde{T^n \times I}$  induit un isomorphisme  $i_{k\#}$ .  $\widetilde{T^n \times I}$  étant difféomorphe à  $T^n \times I$ , d'après ce qui précède, les tores  $T_k^n$  décomposent  $\widetilde{T^n \times I}$  en  $r + 1$  cobordismes triviaux :

$$\widetilde{C}_k = (T_k^n, \widetilde{M}_k, T_{k+1}^n) \quad \text{où } k = 0, 1, \dots, r.$$

avec  $T_0^n = T^n \times \{0\}$  et  $T_{r+1}^n = T^n \times \{1\}$ . Si  $T'^n$  ne décomposait pas  $T^n \times I$  en deux cobordismes, il existerait un chemin  $\omega : I \rightarrow T^n \times I$  qui relie  $T^n \times \{0\}$  et  $T^n \times \{1\}$  sans couper  $T'^n$ . Un relèvement de ce chemin pour  $q$  serait alors un chemin  $\widetilde{\omega} : I \rightarrow \widetilde{T^n \times I}$  qui relierait les deux bords de cette variété sans couper les tores  $T_k^n$ , ce qui est impossible. Ainsi  $T'^n$  décompose  $T^n \times I$  en deux cobordismes  $(T^n \times \{0\}, M_0, T'^n)$ ,  $(T'^n, M_1, T^n \times \{1\})$ . L'image réciproque de  $M_0$  par  $q$  est une sous variété de  $\widetilde{T^n \times I}$  dont le bord est constitué des tores  $T_k^n$  pour  $k = 0, 1, \dots, r$ . Cette variété est connexe puisque  $\pi_1(T'^n) \subset \pi_1(M_1)$ . Ainsi  $r$  nécessairement égal à 1 et  $i_{\#}$  est un isomorphisme.

Lemme 2.4. Soit  $i$  un plongement de  $T^n$  dans  $T^{n+1}$  qui induit un monomorphisme  $i_{\#} : \pi_1(T^n, a) \rightarrow \pi_1(T^{n+1}, a)$ . Alors, si  $n \geq 5$ , il existe une fibration de  $T^{n+1}$  sur  $S^1$  pour laquelle  $i(T^n)$  est une fibre.

Démonstration : Désignons par  $T'^n$  l'image de  $T^n$  par  $i$ . Le quotient  $\pi_1(T^{n+1})/\pi_1(T'^n)$  est isomorphe à  $\mathbb{Z} \oplus G$  où  $G$  est un groupe fini de torsion. Soit  $\rho : \pi_1(T^{n+1}) \rightarrow \mathbb{Z}$  le composé de l'application canonique  $\pi_1(T^{n+1})/\pi_1(T'^n) \rightarrow \mathbb{Z} \oplus G$  par la projection de  $\mathbb{Z} \oplus G$  sur  $\mathbb{Z}$ .

$$\pi_1(T'^n) \subset \text{Ker } \rho = \mathbb{Z}^n \subset \pi_1(T^{n+1}) = \mathbb{Z}^{n+1}$$

D'après le théorème de F.T. Farrell (1), à  $\mathcal{T}$  correspond une fibration  $p$  de  $T^{n+1}$  sur  $S^1$ . La fibre de cette fibration a la type d'homotopie d'un tore et d'après [29], elle est homéomorphe à un tore.

Soit  $q : T^n \times \mathbb{R} \rightarrow T^{n+1}$  le revêtement infini cyclique associé à cette fibration. Désignons par  $a_0$  un point de  $T_0^n = T^n \times \{0\}$  qui se projette sur  $a \in T^1$  et par  $T^n$  la fibre de  $p$  en ce point. Puisque  $\pi_1(T^n) \subset \text{Ker } \mathcal{T}$  la restriction de la projection  $q$  à  $T_0^n$ , la composante connexe de  $q^{-1}(T^1)$ , qui contient le point  $a_0$ , est un difféomorphisme et en outre

$$\pi_1(T_0^n, a_0) \subset \pi_1(T_0^n, a_0) = \pi_1(T^n \times \mathbb{R}, a_0)$$

Il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $T_0^n \subset T^n \times [-p, p]$ . D'après le lemme précédent  $T_0^n$  est isotope à  $T^n$  et ainsi  $\pi_1(T^n) = \pi_1(T_0^n)$ . Soit  $\bar{f} : T^n \times \mathbb{R} \rightarrow T^{n+1}$  l'automorphisme du revêtement  $q$  qui applique  $T_0^n$  sur  $T^n \times \{1\}$ . D'après le lemme précédent  $T_0^n$  et  $T_1^n = \bar{f}(T_0^n)$  sont les bords d'une variété  $M^{n+1}$  difféomorphe à  $T^n \times I$ . Soit  $x$  un point intérieur de  $M^{n+1}$ . Si son image  $\bar{f}(x)$  par  $\bar{f}$  est un point de  $M^{n+1}$ , il existe un chemin  $\tilde{\omega}$  situé dans l'intérieur de  $M^{n+1}$  qui joint ces deux points. La projection  $\omega = q \circ \tilde{\omega}$  de  $\tilde{\omega}$  est un lacet dans  $T^{n+1}$  en  $x$  tel que  $p_{\#}([\omega]) = 1 \in \mathbb{Z}$ ; puisque  $\pi_1(T^n) = \pi_1(T_0^n)$ ,  $\omega$  coupe  $T_0^n$  et  $\tilde{\omega}$  rencontre le bord de  $M^{n+1}$  ce qui contredit l'hypothèse  $\tilde{\omega}(I) \subset \text{int } M^{n+1}$ . Ainsi, la restriction de  $q$  à  $\text{int } M^{n+1}$  est injective et  $M^{n+1}$  est un domaine fondamental du revêtement  $q : T^n \times \mathbb{R} \rightarrow T^{n+1}$ .  $T^{n+1}$  est donc obtenu en identifiant les bords  $T_0^n, T_1^n$  de  $M^{n+1}$  par  $\bar{f}/T_0^n$  et  $T^1$  est une fibre d'une fibration de  $T^{n+1}$  sur  $S^1$ .

Démonstration du théorème : Le feuilletage  $\mathcal{F}$  ne possédant pas de cycle évanouissant non trivial, il vérifie les conditions A et B. S'il n'a pas de feuille compacte, c'est un feuilletage sans holonomie. S'il possède au moins une feuille compacte en coupant la variété le long de cette feuille on obtient une variété difféomorphe

(1) "The obstruction to Fiberings a Manifold over a Circle". Ph. D. Thésis, Yale University 1967 - et Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967).

à  $T^{n-1} \times I$  (lemme 2.4). Il suffit donc de montrer le théorème pour un feuilletage  $\mathcal{F}$  défini par une action de  $\mathbb{R}^{n-1}$  sur  $T^{n-1} \times I$ . Chaque feuille compacte  $L$  de  $\mathcal{F}$  étant isotope à  $T^{n-1} \times \{0\}$ , l'injection  $i : L \hookrightarrow T^{n-1} \times I$  induit un isomorphisme  $i_* : H_1(L) \rightarrow H_1(T^{n-1} \times I)$ . Les hypothèses du théorème 1.3 sont satisfaites et ainsi  $\mathcal{F}$  est un feuilletage presque sans holonomie qui ne possède pas de feuilles exceptionnelles.

L'ensemble des feuilles compactes de  $\mathcal{F}$  non isolées dans l'ensemble de toutes les feuilles compactes de  $\mathcal{F}$  étant compact, il existe  $p$  plongements

$$\phi_k : T^{n-1} \times I \rightarrow M_k \subset T^{n-1} \times I, \quad k = 0, 1, \dots, p$$

tels que

- L'image  $M_k$  de  $\phi_k$  est une sous variété dont le bord est constitué de deux feuilles  $T_{k-1}, T_k$  (des tores  $T^{n-1}$ ).

- Il n'existe qu'un nombre fini de feuilles compactes  $T_k, k = p+1, \dots, q$  qui n'appartiennent pas à  $\bigcup_k M_k$ .

- L'image par  $\phi_k$  du facteur  $I$  est transverse au feuilletage  $\mathcal{F}$ .

D'après le lemme 1.4., chaque feuille  $T_k, k = 0, 1, \dots, q$ , est isotope à  $T^{n-1} \times \{0\}$ .

Il existe donc un difféomorphisme  $h$  de  $T^{n-1} \times I$  qui applique toutes ces feuilles sur des sous-variétés  $T^{n-1} \times \{t_k\}$ . Pour  $1 \leq k \leq p$  on peut de plus supposer que le facteur  $I$  de  $T^{n-1} \times I$  est transverse au feuilletage  $\mathcal{F}_k$  induit par  $h(\mathcal{F})$  sur  $h(M_k)$ . En appliquant le lemme 2.3.I à ces feuilletages on obtient finalement un difféomorphisme tel que i) et ii) soient satisfaits.

#### IV - Applications aux variétés de dimension 3

La condition A (définition 1.1.III) pour un feuilletage  $\mathcal{F}$  d'une variété de dimension trois étant équivalente à :  $\mathcal{F}$  ne possède pas de composante de Reeb, les résultats obtenus dans le chapitre précédent ont alors des interprétations géométriques simples. Ils sont en particulier utilisés dans le paragraphe 2 (théorème 1.2) pour déterminer les classes de conjugaison des feuilletages de  $T^2 \times I$  et  $T^3$  sans composante de Reeb.

Les feuilles compactes de tels feuilletages sont nécessairement homéomorphes à des tores  $T^2$  et, avant d'aborder le problème de leur classification, dans le paragraphe 1, on étudie le germe d'un feuilletage le long d'une feuille torique ; les notions de modèle de tourbillonnement et de tourbillonnement généralisé sont alors définies. Les résultats obtenus sont utilisés pour décrire les feuilletages de Reeb généralisés (théorème 1.2).

Enfin, dans le paragraphe 3, après avoir constaté que toute composante de Reeb d'un feuilletage analytique est obtenue par un tourbillonnement de Reeb, il est montré qu'un feuilletage analytique de  $T^3$  est topologiquement conjugué à une suspension d'un feuilletage de  $T^2$  modifiée par un nombre fini de tourbillonnements.

##### 1. Feuilletage de Reeb généralisé

H. Rosenberg et R. Roussarie dans [18] ont appelé feuilletage de Reeb d'une variété compacte  $M^3$ , un feuilletage dont toutes les feuilles compactes sont des tores  $T^2$  contenus dans le bord  $\partial M^3$  de  $M^3$  et dont les feuilles non compactes sont difféomorphes à des plans. La définition suivante généralise cette notion :

Définition 1.1 : On dit qu'un feuilletage  $\mathcal{F}$  d'une variété compacte  $M^3$  est un feuilletage de Reeb généralisé si :

- i) Les feuilles compactes de  $\mathcal{F}$  sont contenues dans le bord de  $M^3$  et sont homéomorphes à des tores  $T^2$ .
- ii) Le feuilletage  $\mathcal{F}$  est presque sans holonomie.

Afin de pouvoir étudier le germe d'un tel feuilletage le long du bord, on est amené à donner la définition suivante :

Définition 2.1 : On appelle modèle de tourbillonnement généralisé un feuilletage  $\mathcal{C}$  de  $T^2 \times I$ , transversalement orientable tel que :

- i) Le facteur  $I$  et  $T^2 \times \{1\}$  sont transverses au feuilletage  $\mathcal{C}$ .
- ii)  $T^2 \times \{0\}$  est l'unique feuille compacte de  $\mathcal{C}$ .

On désigne par  $\mathcal{C}_1$  le feuilletage de  $T^2 \times \{1\}$  induit par  $\mathcal{C}$  sur  $T^2 \times \{1\}$ . Dans toute la suite  $T^2$  est considéré comme étant le produit  $S^1 \times S^1$ , un de ses points est repéré par ses coordonnées  $(\theta, \theta')$ . Les lacets au point  $0 = (0,0)$ , correspondants aux cercles  $S^1 \times \{0\}$  et  $\{0\} \times S^1$  parcourus dans le sens positif sont notés respectivement  $\alpha_0$  et  $\beta_0$ .

Lemme 1.1 : Soit  $\mathcal{C}$  un modèle de tourbillonnement de classe  $n \geq 2$ . Deux cas sont possibles :

i)  $G(T^2, 0)$  est isomorphe à  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  : alors  $G(T^2, 0)$  est un sous-groupe archimédien de  $G^n$  ; les feuilles non compactes de  $\mathcal{C}$  sont partout denses dans  $T^2 \times I$ , homéomorphes à  $\mathbb{R} \times [0, \infty)$  et la trace de chacune d'elle sur  $T^2 \times \{1\}$  est homéomorphe à  $\mathbb{R}$  et le feuilletage  $\mathcal{C}_1$  est un feuilletage ergodique.

ii)  $G(T^2, 0)$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$  : alors, les feuilles non compactes de  $\mathcal{C}$  sont homéomorphes à  $S^1 \times [0, \infty)$  et la trace de chacune d'elle sur  $T^2 \times \{1\}$  est un cercle. Ainsi,  $\mathcal{C}$  est l'image par un  $C^\infty$ -difféomorphisme d'un modèle de tourbillonnement

$\mathcal{C}_j$  de classe  $n$  tel que :

- les feuilles de  $\mathcal{C}_j$  sont les cercles  $S^1 \times \{0\} \times \{1\}$
- les difféomorphismes locaux d'holonomie en 0,  $f_{\alpha_0}, f_{\beta_0} : I \rightarrow I$  sont respectivement l'identité, une contraction.

Ce lemme, qui est une description géométrique d'un modèle de tourbillonnement, est précisé dans le paragraphe suivant : dans le lemme 1.2 et la remarque 1.2 on détermine les classes de conjugaison des modèles de tourbillonnements.

Démonstration : La feuille compacte  $T^2 \times \{0\}$  étant isolée dans l'ensemble des feuilles compactes de  $\mathcal{C}$  et son groupe fondamental étant abélien, son groupe d'holonomie  $G(T^2, 0)$  est un sous-groupe archimédien de  $\mathcal{U}^r$  d'après le théorème 1.3.I.

i) Si  $G(T^2, 0)$  est isomorphe à  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  on peut toujours orienter  $\alpha_0$  et  $\beta_0$  de telle façon que les difféomorphismes locaux d'holonomie  $f_{\alpha_0}, f_{\beta_0}$  qui leur sont associés soient contractants. Les relèvements suivant les normales étant construits en utilisant le facteur  $I$ , ces deux difféomorphismes sont définis sur  $[0, 1]$ . La trace d'une feuille non compacte sur  $\{0\} \times I$  contient l'orbite d'un de ces points par le pseudo-groupe d'holonomie  $P(T^2, 0)$ . D'après le théorème 1.1.I. elle est partout dense dans  $T^2 \times I$ .

Montrons maintenant qu'une telle feuille est simplement connexe. Soit  $\gamma$  un lacet au point  $(0, s)$  dans la feuille  $L_s$  passant par ce point. Sa projection suivant le facteur  $I$  sur  $T^2 \times \{0\}$  est un lacet  $\gamma_0$  dont il est le relèvement de hauteur  $s$ . Le point  $s$  est donc un point fixe du difféomorphisme local d'holonomie  $f_{\gamma_0}$ ; mais  $G(T^2, 0)$  étant un sous-groupe archimédien de  $\mathcal{U}^r$ , il est sans point fixe (proposition 1.1.I). Ainsi  $f_{\gamma_0}$  est l'application identique de  $I$ .  $\gamma_0$  est donc homotope à zéro dans  $T^2$  et  $\gamma$  est homotope à zéro dans la feuille  $L_s$ .

Toute feuille non compacte (étant simplement connexe) coupe  $T^2 \times \{1\}$  suivant

des droites  $\mathbb{R}$ .  $\mathcal{C}_1$  est donc un flot ergodique. D'autre part, puisque l'orbite d'un point  $s$  de  $\{0\} \times I$  par  $P(T^2, 0)$  correspond exactement à la trace de la feuille  $L_s$  passant par  $(0, s)$  (d'après le lemme 3.3.III),  $L_s$  coupe  $T^2 \times \{1\}$  suivant une seule feuille de  $\mathcal{C}_1$  et ainsi  $L_s$  est homéomorphe à  $\mathbb{R} \times [0, \infty)$

ii) Si  $G(T^2, 0)$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$ , on peut choisir les générateurs  $\alpha_0$  et  $\beta_0$  de telle façon que  $f_{\alpha_0}$  soit l'application identique de  $I$  et que  $f_{\beta_0}$  soit contractant. On montre, de la même façon, que dans le corollaire 1.3.III que les feuilles non compactes de  $\mathcal{C}$  sont homéomorphes à  $S^1 \times [0, \infty)$ . L'intersection de chacune d'elle avec  $T^2 \times \{1\}$  est donc un cercle homologue à  $\alpha_0$ . Ainsi il existe un  $C^r$ -difféomorphisme de  $T^2 \times I$  qui applique les feuilles de  $\mathcal{C}_1$  sur les cercles  $S^1 \times \{0'\} \times \{1\}$  de  $T^2 \times \{1\}$ .

Remarque 1.1. : On déduit immédiatement de ce lemme qu'un feuilletage  $\mathcal{C}_1$  de  $T^2$  peut se prolonger en un modèle de tourbillonnement  $\mathcal{C}$  de  $T^2 \times I$ , de classe supérieure ou égale à 2, seulement s'il est sans holonomie. Les seuls feuilletages de  $T^2$  que l'on sait ainsi prolonger sont des feuilletages différentiablement conjugués à un feuilletage linéaire de  $T^2$ . En effet un tel feuilletage peut être défini par une 1-forme fermée  $\omega_1$  et le feuilletage  $\mathcal{C}$  est alors défini par une 1-forme  $\omega$  du type suivant :

$$\omega = \lambda(s) \omega_1(x) + \mu(s) ds, \quad (x, s) \in T^2 \times I$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont des fonctions  $C^\infty$  qui s'annulent respectivement en 0 et 1. Il est vraisemblable que l'on obtient tous les modèles de tourbillonnement de cette façon ; c'est à dire que tout feuilletage de  $T^2$  prolongeable en un modèle de tourbillonnement de classe  $\geq 2$  peut être défini par une 1-forme fermée. <sup>(1)</sup>

Définition 3.1 : Soient  $\mathcal{F}$  un feuilletage de codimension 1, transversalement orientable d'une variété  $M^3$  et  $L_0$  une feuille de  $\mathcal{F}$  homéomorphe à  $T^2$ . On dit que  $\mathcal{F}$  tourbillonne autour de  $L_0^+$  (du côté positif de  $L_0$ ) s'il existe un collier de  $L_0^+$ .

(1) Avec G. Joubert j'ai démontré que cette conjecture est vraie.

$$\phi : T^2 \times I \longrightarrow M^3 \quad (\phi(T^2 \times \{0\}) = L_0)$$

tel que l'image réciproque par  $\phi$  de  $\mathcal{F}$  est un modèle de tourbillonnement généralisé.

Si  $L_0$  est une feuille incluse dans  $\partial M^3$  on dit que le feuilletage  $\mathcal{F}$  est obtenu à partir du feuilletage  $\mathcal{F}' = \mathcal{F}/M^3 - \phi(T^2 \times [0,1))$ , par un tourbillonnement généralisé. Inversement soit  $\mathcal{F}'$  un feuilletage de  $M^3$  transverse à une composante connexe  $L_0$  (homéomorphe à  $T^2$ ) de  $\partial M^3$ . Si le feuilletage  $\mathcal{F}$  induit par  $\mathcal{F}'$  sur  $L_0$  est différentiablement conjugué à un feuilletage linéaire de  $T^2$ , il existe un modèle de tourbillonnement  $\mathcal{G}$  qui le prolonge. Le feuilletage  $\mathcal{F}$  obtenu en recollant  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  le long de  $L_0$  est obtenu à partir de  $\mathcal{F}'$  par un tourbillonnement généralisé. On peut toujours faire cette construction de telle façon que  $\mathcal{F}$  soit de même classe que  $\mathcal{F}'$ .

Avec ces notations on peut définir de la façon suivante le tourbillonnement classique de G. Reeb [15] : Désignons par  $\mathcal{R}_0$  un feuilletage de  $S^1 \times D^2$  qui se déduit du feuilletage trivial de  $S^1 \times D^2$  (par les disques  $D^2 \times \{0\}$ ) par un tourbillonnement. Soit maintenant  $\mathcal{G}$  un modèle de tourbillonnement de  $S^1 \times (D_2^2 - \text{int } D^2) = T^2 \times I$  qui induit sur  $S^1 \times \partial D_2^2 (= T^2 \times \{1\})$  le feuilletage par les cercles  $S^1 \times \{0\}$ , où  $D_2^2$  désigne le disque fermé de  $\mathbb{R}^2$  de rayon 2. En recollant  $\mathcal{R}_0$  et  $\mathcal{G}$  le long de leur feuille commune  $S^1 \times \partial D^2$  on obtient un feuilletage  $\mathcal{R}$  de  $S^1 \times D_2^2$  que l'on peut toujours supposer  $C^\infty$ ; il suffit pour cela que les feuilletages  $\mathcal{R}_0$  et  $\mathcal{G}$  soient  $C^\infty$  tangents à  $\partial D^2$ , c'est à dire que l'image d'un lacet correspond à  $S^1 \times \{x\}$  (où  $x \in \partial D^2$ ) par un homomorphisme d'holonomie en  $(0, x)$  soit  $C^\infty$  - tangent à l'identité. Dans [18] il est montré que tous les feuilletages  $\mathcal{R}$  obtenus de cette façon sont topologiquement conjugués. Soient maintenant  $\mathcal{F}$  un feuilletage transversalement orientable d'une variété  $M^3$ ,  $\tau : S^1 \rightarrow M^3$  un plongement de  $S^1$  transverse à  $\mathcal{F}$  et  $\psi_2 : S^1 \times D_2^2 \rightarrow M^3$  un voisinage tubulaire de  $\tau(S^1)$  tel que l'image réciproque de  $\mathcal{F}$  par  $\psi_2$  soit le feuilletage trivial de

$S^1 \times D_2^2$ . Le feuilletage  $\mathcal{F}'$ , obtenu en recollant à  $\mathcal{F}/M^3 - \psi_2(\text{int } S^1 \times D_2^2)$  le feuilletage  $\psi_2(\mathcal{R})$ , se déduit de  $\mathcal{F}$  par un tourbillonnement de Reeb. Puisque tous les feuilletages  $\mathcal{R}$  sont topologiquement conjugués, cette modification de  $\mathcal{F}$  est parfaitement déterminée à une conjugaison topologique près.

La proposition suivante justifie la définition d'un modèle de tourbillonnement généralisé.

Proposition 1.1 : Soient  $\mathcal{F}$  un feuilletage transversalement orientable, de classe  $r \geq 2$  d'une variété  $M^3$  et  $L_0$  une feuille de  $\mathcal{F}$  homéomorphe à  $T^2$ , isolée du côté positif dans l'ensemble des feuilles compactes de  $\mathcal{F}$ . Alors  $\mathcal{F}$  tourbillonne autour de  $L_0^+$ .

Démonstration : Le groupe fondamental de  $L_0$  étant abélien, le groupe d'holonomie positive  $G(L_0^+, a)$  en un point  $a$  de  $L_0$  est un sous-groupe archimédien de  $\mathcal{G}_r$  (théorème 1.3.I). Ainsi d'après la proposition 1.1.I il existe un plongement

$$\phi_0 : T^2 \rightarrow M^3 \quad (\phi_0(T^2) = L_0, \phi_0(0) = a) \text{ tel que :}$$

- Un difféomorphisme local d'holonomie  $f_{\beta_0}$  associé au lacet  $\phi_0(\beta_0)$  ( $\beta_0$  correspond au cercle  $\{0\} \times S^1$ ) soit contractant.

- Si  $G(L_0^+, a)$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$ , respectivement à  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ , un difféomorphisme local d'holonomie  $f_{\alpha_0}$  associé au lacet  $\phi_0(\alpha_0)$  ( $\alpha_0$  correspond au cercle  $S^1 \times \{0\}$ ) est l'application identique, respectivement un difféomorphisme contractant.

Soit alors  $\phi : T^2 \times [0, 2) \rightarrow M^3$  un collier de  $L_0^+$  (du côté positif) qui prolonge  $\phi_0$  et tel que l'image réciproque de  $\mathcal{F}$  par  $\phi$  soit un feuilletage  $\mathcal{F}_\phi$ , transverse au facteur  $[0, 2)$  (lemme 1.3.I). On peut toujours en outre supposer que

les lacets  $\alpha_\theta, \beta_\theta$  définis par

$$\alpha_\theta(t) = (t, \theta', 0) \text{ et } \beta_\theta = (\theta, t, 0), \quad (\theta, \theta') \in S^1 \times S^1 = T^2$$

se relèvent suivant les normales (le facteur  $[0,2)$ ) en des chemins  $\alpha_{\theta,s}$  et  $\beta_{\theta,s}$  pour tout  $s \in (0,2)$ . Distinguons alors deux cas :

i)  $G(L_0^+, a)$  est isomorphe à  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ . Le difféomorphisme  $f_{\alpha_0}$  étant contractant  $\alpha_{0,s}$  est un chemin d'extrémité un point  $(0,0,s')$  avec  $s' < s$ . Ainsi une trajectoire du feuilletage induit par  $\mathcal{F}_\phi$  sur la couronne  $S^1 \times \{0\} \times [0,2)$  qui coupe  $\{0\} \times [0,2)$  s'enroule en spiralant autour du cercle  $S^1 \times \{0\} \times \{0\}$ . On peut toujours supposer (à un difféomorphisme près de  $T^2 \times [0,2)$ ) que le cercle  $S^1 \times \{0\} \times \{1\}$  est une transversale fermée  $\tau$  de  $\mathcal{F}_\phi$ .

Sur la couronne  $S^1 \times [0,1]$ ,  $\mathcal{F}_\phi$  induit un feuilletage dont  $S^1 \times \{0\} \times \{0\}$  est la seule feuille compacte. Ses autres feuilles sont homéomorphes à  $[0,\infty)$  et coupent transversalement  $S^1 \times \{0\} \times \{1\}$  (Figure 1.1).

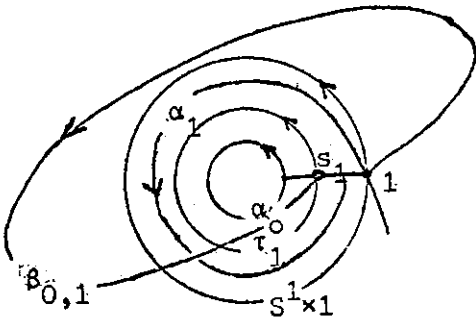


Figure 1.1.

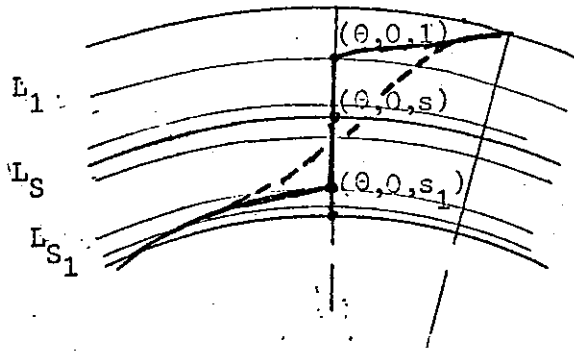


Figure 2.1.

Un relèvement suivant les normales pour  $\mathcal{F}_\phi$ ,  $\beta_{\theta,1}$  de  $\beta_\theta$  en un point  $(\theta,0,1)$  a pour extrémité un point intérieur  $(\theta,0,s)$  de la couronne  $S^1 \times \{0\} \times [0,1]$  puisque le difféomorphisme local d'holonomie correspondant à  $\beta_\theta$  est contractant.

L'ensemble de ces relèvements permet de définir un plongement transverse à  $\mathcal{F}_\phi$  :

$$h : S^1 \times I \rightarrow T^2 \times [0,2) \quad \text{où} \quad h(\theta,t) = \beta_{\theta,1}(t)$$

Les restrictions de  $h$  à  $S^1 \times \{0\}$  et  $S^1 \times \{1\}$  sont respectivement la transversale fermée  $\tau$  et une transversale fermée  $\tau_1$  située dans la couronne  $S^1 \times \{0\} \times [0,1]$ .

Ces deux transversales sont les bords d'une couronne dans  $S^1 \times \{0\} \times [0,1]$  à laquelle correspond un plongement  $h' : S^1 \times I \rightarrow T^2 \times [0,2]$  tel que :

$$h'(\theta, 0) = \tau_1(\theta) = h(\theta, 1) \quad \text{et} \quad h'(\theta, 1) = \tau(\theta) = h(\theta, 0)$$

En recollant  $h$  et  $h'$  le long de  $\partial(S^1 \times I)$  on obtient un plongement topologique de  $T^2$ . On est alors dans la situation du lemme 1 de [3]. On peut lisser ce plongement de telle façon que le plongement  $H$  obtenu après lissage soit transverse au feuilletage  $\mathcal{F}_\phi$  et au facteur  $[0,2)$  (voir figure 2.1). Puisqu'il existe un difféomorphisme  $d$  de  $T^2 \times [0,2)$  (isotope à l'identité) tel que l'image de  $T^2 \times \{1\}$  par  $d$  soit  $H(T^2)$ , la restriction de  $\phi \circ d$  à  $T^2 \times [0,1]$  est un voisinage tubulaire qui satisfait à la définition 2.1.

ii)  $G(L_{0,a_0}^+)$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$  : Alors  $\alpha_{0,s}$  est un lacet et on peut toujours supposer (à un difféomorphisme près de  $T^2 \times [0,2)$ ) que

$$\alpha_{0,s}(t) = (t, 0, s) \quad \text{pour tout } s \in [0,1].$$

On retrouve la situation décrite dans le corollaire 2.3.III et les relèvements  $\beta_{\theta,1}$  des lacets  $\beta_\theta$  aux points  $(\theta, 0, 1)$  de  $\alpha_{0,1}(S^1)$  permettent de définir un plongement

$$h : S^1 \times I \rightarrow T^2 \times [0,2] \quad \text{avec } h(\theta, t) = \beta_{\theta,1}(t)$$

Ainsi,  $h(\theta, 0) = (\theta, 0, 1)$  et  $h(\theta, 1) = (\theta, 0, s_1)$  où  $s_1$  est inférieur à 1 puisqu'un difféomorphisme local d'holonomie associé à  $\beta_\theta$  est contractant ( $h$  est un plongement dans une feuille de  $\mathcal{F}_\phi$ ). Soit maintenant le plongement :

$$h' : S^1 \times I \rightarrow T^2 \times [1,2] \quad \text{où } h'(\theta, t) = (\theta, 0, (1-t) \cdot s_1 + t)$$

Le recollément de  $h$  et  $h'$  le long de  $(S^1 \times I)$  est un plongement topologique (voir figure 3.1.)

$$H : T^2 \rightarrow T^2 \times [0,2]$$

En procédant de la même façon que pour construire une transversale fermée à partir d'un chemin dans une feuille et d'un arc de normale (lemme 1.4.I), on peut lisser ce plongement et obtenir après lissage un plongement  $H_0$  transverse

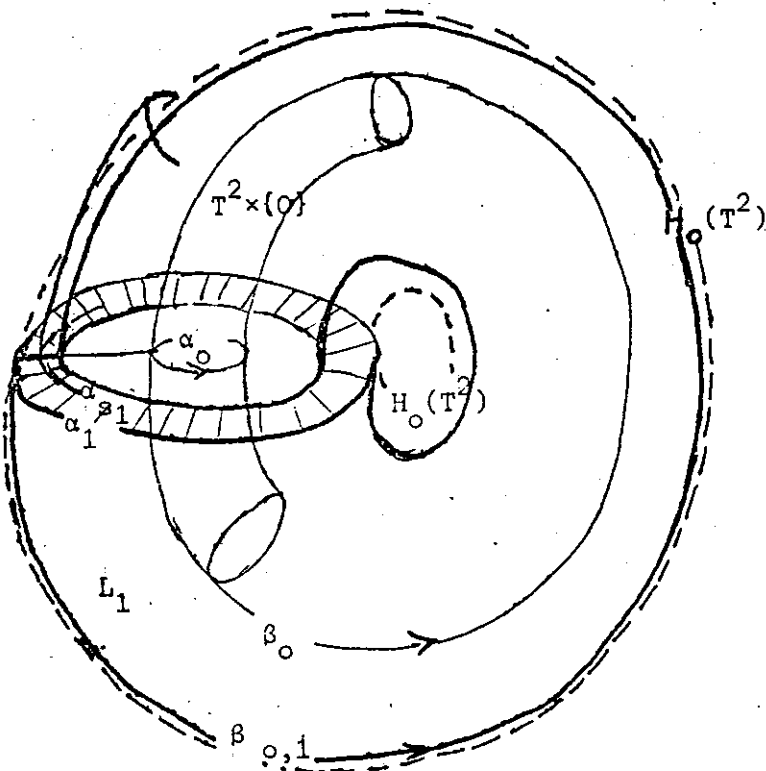


Figure 3.1.

au feuilletage  $\mathcal{F}_\phi$  et au facteur  $[0,2]$ . Alors il existe un difféomorphisme  $d$  de  $T^2 \times [0,2]$  qui applique  $T^2 \times \{1\}$  sur  $H_0(T^2)$  et la restriction de  $\phi \circ d$  à  $T^2 \times [0,1]$  vérifie alors la définition 2.1.

Théorème 1.1. : Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage de Reeb généralisé de classe  $n \geq 2$ , de codimension 1, transversalement orientable d'une variété  $M^3$ . Alors, la variété  $M^3$  est fibrée sur  $S^1$  (de fibre transverse à  $\partial M^3$ ) et si  $\mathcal{F}$  n'est pas réduit à une composante de Reeb il vérifie les conditions A et B. Ainsi,  $L$  désignant une feuille qui passe par un point  $a$  n'appartenant pas à  $\partial M^3$ , deux cas sont possibles.

i) Le quotient  $\pi_1(M,a)/\pi_1(L,a)$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$ , alors  $\mathcal{F}$  se déduit de la fibration par des tourbillonnements généralisés autour des tores qui constituent  $\partial M^3$ .

ii) Le quotient  $\pi_1(M,a)/\pi_1(L,a)$  possède au moins deux générateurs indépendants,

alors  $\mathcal{F}$  se déduit d'un feuilletage sans holonomie  $\mathcal{F}'$  de  $M^3$  (transverse à  $\partial M^3$ ) par des tourbillonnements généralisés autour des tores dont la réunion est  $\partial M^3$ .

Dans i) les feuilles non compactes sont propres, dans ii) elles sont partout denses dans  $M^3$ .

Démonstration: Désignons par  $\{L_k\}_{1 \leq k \leq n}$  les feuilles de  $\mathcal{F}$  homéomorphes à  $T^2$ , dont la réunion est le bord de  $M^3$ . A chacune d'elle on associe un plongement  $\phi_k : T^2 \times [0,1] \rightarrow M^3$ , tel que  $\phi_k^{-1}(\mathcal{F})$  soit un modèle de tourbillonnement généralisé. Soit alors

$$M'^3 = M^3 - \bigcup_{k=1}^n \phi_k(T^2 \times [0,1])$$

La restriction  $\mathcal{F}'$  de  $\mathcal{F}$  à  $M'^3$  est un feuilletage sans holonomie transverse au bord. Le théorème 2.1.II (D. Tischler) entraîne que  $M'^3$  est un fibré sur  $S^1$  de fibre transverse  $\partial M'^3$ ; il en est donc de même pour  $M^3$ . Si  $\mathcal{F}$  ne vérifie pas la condition A, le feuilletage possède une composante de Reeb dont le bord est inclus dans  $\partial M^3$ . Ainsi  $M^3$  se réduit à cette composante de Reeb.

Supposons que  $\mathcal{F}$  n'est pas une composante de Reeb. Une feuille  $L'$  de  $\mathcal{F}'$  est, d'après les lemmes précédents, un rétracté par déformation de la feuille  $L$  de  $\mathcal{F}$  qui la contient. Ainsi les groupes quotients  $\pi_1(M,a)/\pi_1(L,a)$  et  $\pi_1(M',a)/\pi_1(L',a)$  sont isomorphes et ils sont abéliens libres (corollaire 1.1.II)

i) Si  $\pi_2(M,a)/\pi_2(L,a) \cong \mathbb{Z}$ , le feuilletage  $\mathcal{F}'$  est une fibration de  $M'^3$  et d'après le lemme 2.1,  $\mathcal{F}$  est obtenu en faisant tourbillonner les fibres de la fibration correspondante de  $M^3$  autour de chacune des composantes connexes  $L_k$  de  $\partial M^3$ .

ii) Si  $\pi_1(M,a)/\pi_1(L,a) \cong \mathbb{Z}^p$  avec  $p \geq 2$ ,  $\mathcal{F}'$  est un feuilletage sans holonomie transverse au bord et  $\mathcal{F}$  s'en déduit par des tourbillonnements généralisés autour des composantes connexes de  $\partial M^3$ .

Remarque 1.1. : Pour que la trace d'une feuille de  $\mathcal{F}'$  sur une composante connexe  $L'_k$  de  $\partial M^3$  (qui correspond à la feuille  $L_k$  de  $\mathcal{F}$ ) soit connexe, il suffit d'après le théorème 1.3.II que l'injection  $i_k : L_k \hookrightarrow M^3$  induise un homomorphisme surjectif  $i_{k*} : H_1(L_k) \longrightarrow H_1(M^3)$ . S'il en est ainsi, toute feuille de  $\mathcal{F}$  possède un "bout" et seul qui contient  $L_k$  dans son adhérence. Cette propriété peut-être aussi déduite du lemme 3.3.III : puisque  $i_{k*}$  est surjectif, la trace d'une feuille  $L$  de  $\mathcal{F}$  sur un segment transverse issu d'un point  $a$  de  $\partial M_k$  correspond à l'orbite d'un point de  $R$  par  $P(L_k, a)$  et à cette trace est associée un "bout" de  $L$  et un seul. Cette analogie entre les feuilletages presque sans holonomie et les feuilletages sans holonomie transverses au bord fournit une interprétation géométrique de la condition supplémentaire,  $i_* : H_1(L_0) \longrightarrow H_1(M)$  est surjectif, imposée aux feuilles compactes dans le théorème 1.3.IV.

Dans le paragraphe suivant, les feuilletages de Reeb généralisés de  $T^2 \times I$  seront classifiés. Nous n'aborderons pas ce problème dans le cas général. Signalons cependant le résultat suivant de [12] : lorsque  $M^3$  est un fibré trivial sur  $S^1$  ( $M^3 = S^1 \times M^2$ ), les classes de conjugaison de ces feuilletages sont déterminées par un élément  $\delta(\mathcal{F}) \in SH(M^3, R)$  et par des nombres  $i_k = 0, 1$  qui déterminent le sens dans lequel le feuilletage "spirale" autour de la composante  $L_k$  de  $\partial M^3$ .

Le théorème précédent peut-être appliqué dans différents cas. Le corollaire qui suit en est un exemple. Rappelons, avant de l'énoncer une construction classique de feuilletage de  $S^3$  : soit  $\psi : S^1 \times D^2 \longrightarrow N \hookrightarrow S^3$ , un voisinage tubulaire du complémentaire d'un noeud de type fini de  $S^3$ . La variété  $M = S^3 - \text{int } N$  est un fibré sur  $S^1$  de fibre la surface minimale qui s'appuie sur le noeud. La trace de cette fibration sur  $\partial M \simeq T^2$  est un feuilletage par des cercles, en le faisant tourbillonner on obtient un feuilletage  $\mathcal{F}$  presque sans holonomie de  $M$  tangent à  $\partial M$ . Pour obtenir un feuilletage de  $S^3$  il suffit de recoller  $\mathcal{F}$  à un feuilletage de Reeb de  $N = D^2 \times S^1$ . On dira que le feuilletage ainsi obtenu est un feuilletage de Stallings-Neuwirth.

Corollaire 1.1 : Un feuilletage presque sans holonomie, de classe  $r \geq 2$ , orientable de  $S^3$  qui ne possède qu'une seule feuille compacte est un feuilletage de Stallings-Neuwirth.

Démonstration : On sait, [13], que cette feuille compacte est le bord d'une composante de Reeb  $N$  du feuilletage  $\mathcal{F}$ . Le feuilletage induit par  $\mathcal{F}$  sur  $M^3 = S^3 - \text{int } N$  est un feuilletage de Reeb généralisé. Ainsi,  $M^3$  est un fibré sur  $S^1$  de fibre transverse à  $\partial M$  ( $M$  est donc le complémentaire d'un noeud de type fini).

Soit  $L$  une feuille non compacte de  $\mathcal{F}$  incluse dans  $M$ . Avec les notations de la démonstration du théorème on a

$$\pi_1(M', a) / \pi_1(L', a) = \pi_1(M, a) / \pi_1(L, a)$$

Le corollaire 1.1.II entraîne l'isomorphisme suivant :

$$\mathbb{Z} = H_1(M') = \pi_1(M', a) / \pi_1(L', a) \oplus \pi_1(L, a) / C(M, a)$$

Ainsi  $\pi_1(M, a) / \pi_1(L, a)$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$  et le feuilletage  $\mathcal{F}$  est obtenu par tourbillonnement de la fibration. C'est un feuilletage de Stallings-Neuwirth.

## 2. Conjugaison des feuilletages de $T^2 \times I$ et $T^3$ sans composante de Reeb

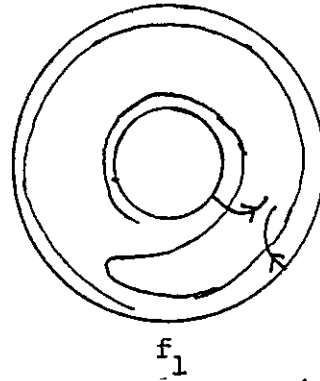
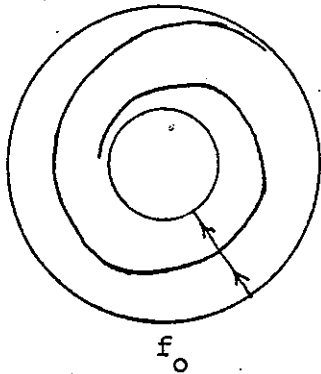
Rappelons la définition de la relation de conjugaison entre deux feuilletages.

Définition 1.2. : Deux feuilletages  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}'$  d'une variété  $M^n$  sont topologiquement conjugués s'il existe un homéomorphisme de  $M^n$  qui envoie les feuilles de  $\mathcal{F}$  sur les feuilles de  $\mathcal{F}'$ .

Avant d'aborder la classification des feuilletages de  $T^2 \times I$  et  $T^3$ , rappelons quelques résultats de conjugaison bien connus que nous serons amenés à utiliser.

a) Sur la couronne  $S^1 \times I$ , il n'existe que deux classes (de conjugaison) de feuilletages de classe supérieure ou égale à deux dont les seules feuilles compactes

sont  $S^1 \times \{0\}$  et  $S^1 \times \{1\}$ . Pour représentant de chacune de ces classes on choisit deux feuilletages  $f_0$  et  $f_1$  qui sont les orbites d'un champ de vecteurs spiralant d'une composante du bord à l'autre dans  $S^1 \times [0,1]$  et qui induisent la même orientation de  $S^1 \times \{0\}$  et  $S^1 \times \{1\}$  pour  $f_0$  et des orientations opposées pour  $f_1$ .



En outre, on supposera que  $f_0$  et  $f_1$  sont transverses aux cercles  $S^1 \times \{t\}$  pour  $t \in [0,1]$  et qu'ils sont invariants par les rotations

$$r_\alpha : S^1 \times I \longrightarrow S^1 \times I, \quad r_\alpha(\theta, t) = (\theta + \alpha, t) \text{ où } \alpha \in S^1.$$

On peut prendre, par exemple, pour  $f_0$  et  $f_1$  respectivement les feuilletages définis par les 1-formes :

$$\omega_0 = ds + \varphi(s) d\theta \quad \text{et} \quad \omega_1 = (1-2s)ds + \varphi(s) d\theta$$

où  $(\theta, s) \in S^1 \times I$ ,  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  est  $C^\infty$  et  $\varphi(s) > 0$  pour  $s \in (0,1)$  et  $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ .

De ce résultat et du théorème de A. Denjoy [1] on déduit que :

b) Sur le tore  $T^2$  (ou la couronne  $S^1 \times I$ ) un feuilletage  $f$  de classe  $\geq 2$ , transversalement orientable est topologiquement conjugué :

- s'il n'a pas de feuille compacte à un feuilletage (linéaire) défini par une 1-forme

$$\omega = \alpha ds + \beta d\theta, \quad (\theta, s) \in T^2$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux nombres réels rationnellement indépendants.

- s'il possède au moins une feuille compacte à un feuilletage défini par une 1-forme

$$\omega = \psi(s)ds + \varphi(s)d\theta.$$

où  $\psi$  et  $\varphi$  sont des applications  $C^\infty$  de  $S^1$  (ou  $I$ ) dans  $\mathbb{R}$  sans zéro communs et  $\varphi^{-1}(0) \neq \emptyset$  (dans le cas de  $S^1 \times I$ ,  $\varphi^{-1}(0) \supset \partial I$ ).

En utilisant  $f_0$  et  $f_1$  on peut décrire un tel feuilletage de la façon suivante :

- ses feuilles compactes sont des cercles  $S^1 \times \{s\}$  où  $s$  est un zéro de  $\varphi$ .
- si  $\{I_k\}_{k \in B}$  (où  $B \subset \mathbb{N}$ ) est l'ensemble des intervalles ouverts deux à deux dis-joints dont la réunion est  $S^1 - \varphi^{-1}(0)$  (ou  $I - \varphi^{-1}(0)$  dans le cas de  $S^1 \times I$ ), sur  $S^1 \times \bar{I}_k$  ce feuilletage induit un feuilletage du type  $f_{i_k}$  où  $i_k = 0, 1$ . Pour des raisons de continuité et d'orientabilité du feuilletage  $i_k = 0$  sauf pour un nombre fini et pair de  $k \in B$ .

Les ensembles  $\{I_k\}$  et  $\{i_k\}$  où  $k \in B$  caractérisent complètement le type topologique de ce feuilletage que nous noterons  $f(I_k, i_k, B)$ .

e) Sur  $(S^1 \times I) \times \mathbb{R}$  opère le groupe  $G_\alpha$  engendré par le difféomorphisme  $\bar{r}_\alpha$  défini par

$$\bar{r}_\alpha(x, t) = (r_\alpha(x), t+1) \text{ où } (x, t) \in T^2 \times I$$

Le feuilletage  $f_i \times \mathbb{R}$  de  $(S^1 \times I) \times \mathbb{R}$  étant globalement invariant par  $G_\alpha$ , son image par l'application quotient  $(S^1 \times I) \times \mathbb{R} \rightarrow (S^1 \times I) \times \mathbb{R}/G_\alpha = T^2 \times I$  est un feuilletage  $\mathcal{F}(i, \alpha)$  de même classe que  $f_i$ . On peut aussi obtenir ce feuilletage à partir de  $f_i \times I$  en recollant  $S^1 \times I \times \{0\}$  et  $S^1 \times I \times \{1\}$  par le difféomorphisme  $\bar{r}_\alpha$ ,  $\bar{r}_\alpha(x, 0) = (r_\alpha(x), 1)$ , et pour cette raison on dira que  $\mathcal{F}(i, \alpha)$  est une  $\alpha$ -suspension du feuilletage  $f_i$ .

Le feuilletage  $\mathcal{F}(i, \alpha)$  est un feuilletage de Reeb généralisé dont les feuilles non compactes sont homéomorphes à  $\mathbb{R}^2$  si  $\alpha$  est irrationnel, à  $S^1 \times \mathbb{R}$  si  $\alpha$  est rationnel. Il est facile de voir que deux feuilletages  $\mathcal{F}(i, \alpha)$ ,  $\mathcal{F}(i, \alpha')$  où  $\alpha$  et  $\alpha'$  sont des rationnels, sont conjugués par un difféomorphisme. H. Rosenberg et G. Châtelet ont montré dans [3] qu'un feuilletage de Reeb de  $T^2 \times I$  est topologiquement conjugué à un feuilletage  $\mathcal{F}(i, \alpha)$  où  $\alpha$  est irrationnel. Les nombres  $\alpha$  et  $i$  sont déterminés de la façon suivante :

- $i = 1$ , respectivement  $i = 0$  si le champ des normales est rentrant (ou sortant)

sur les deux composantes connexes du bord, respectivement est rentrant sur une composante du bord et sortant sur l'autre. Dans ce dernier cas, on peut montrer en outre avec les mêmes méthodes de [21] que  $\mathcal{F}$  est différentiablement conjugué à un feuilletage transverse au facteur I.

- Au point  $(0,0,0)$  de  $T^2 \times I$  correspondent respectivement aux lacets  $\alpha_0$  et  $\beta_0$  des difféomorphismes locaux d'holonomie  $f$  et  $g$  que l'on peut supposer contractants.

Puisque le pseudo-groupe engendré par  $f$  et  $g$  est archimédien, il existe une application  $k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  (remarque 1.1.I) telle que

$$g^{k(n)+1} < f^n < g^{k(n)} \quad \text{et alors} \quad \alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(n)}{n}$$

Si  $f'$  et  $g'$  désignent les difféomorphismes locaux d'holonomie associés respectivement aux lacets  $\alpha_1$  et  $\beta_1$  au point  $(0,0,1)$ , il existe une application  $k' : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  telle que

$$g'^{k'(n)+1} < f'^{(-1)^{(i+1)}n} < g'^{k'(n)} \quad \text{et alors} \quad \alpha' = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k'(n)}{n} = \alpha$$

Remarque 1.2. : En fait les résultats de [3] sont plus précis encore. On peut les énoncer (partiellement) de la façon suivante :

Les modèles de tourbillonnement généralisés  $\mathcal{C}$  de classe  $r \geq 2$ , (définition 2.1.) tels que  $G(T^2, 0)$  est isomorphe à  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  sont classifiés soit par

i) le nombre  $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(n)}{n}$  où  $k(n)$  est déterminé par

$$f_{\beta_0}^{k(n)+1} < f_{\beta_0}^n < f_{\beta_0}^{k(n)}$$

ii) le nombre  $\alpha'$  qui caractérise le feuilletage linéaire auquel est conjugué le feuilletage ergodique  $\mathcal{E}_1$  induit par  $\mathcal{E}$  sur  $T^2 \times \{1\}$  et ces deux réels sont égaux.

Théorème 1.2. : Un feuilletage de  $T^2 \times I$ , transversalement orientable, de classe  $r \geq 2$ , dont les seules feuilles compactes sont  $T^2 \times \{0\}$  et  $T^2 \times \{1\}$  est topologiquement conjugué à un feuilletage  $\mathcal{F}(i, \alpha)$

Le lemme suivant complète la remarque précédente.

Lemme 1.2. : Deux modèles de tourbillonnement généralisés de classe  $n \geq 2$ , tels que  $G(T^2, 0)$  est isomorphe à  $Z$  sont topologiquement conjugués par un homéomorphisme dont la restriction au bord est l'application identique.

Démonstration : Soit  $\mathcal{C}_0$  le modèle de tourbillonnement image réciproque de  $\mathcal{F}(0,0)$  par le difféomorphisme de  $T^2 \times I$  sur  $T^2 \times [0, \frac{1}{4}] \subset T^2 \times I$  qui à  $(x,s)$  associe le point  $(x, 4s)$ . Si  $\mathcal{C}$  est un modèle de tourbillonnement, on a vu dans le lemme 1.1. que l'on peut toujours choisir les générateurs  $\alpha_0, \beta_0$  de  $T^2 = S^1 \times S^1$  de telle façon que les difféomorphismes d'holonomie  $f_{\alpha_0}$  et  $f_{\beta_0}$  en  $(0,0,1)$  correspondants soient par exemple respectivement contractants et l'application identique de  $I$ . On peut en outre supposer que la trace d'une feuille de  $\mathcal{C}$  sur  $T^2 \times \{1\}$  est un cercle  $\{0\} \times S^1 \times \{1\}$ . Il nous suffit de montrer qu'il existe un homéomorphisme qui conjugue  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}_0$  et dont la restriction au bord est l'application identique.

Il existe un homéomorphisme  $h : S^1 \times I \rightarrow S^1 \times I$  qui applique le feuilletage induit sur la couronne  $S^1 \times I \times \{0\}$  par  $\mathcal{C}_0$  sur le feuilletage induit sur cette même couronne par  $\mathcal{C}$ . Il est toujours possible de supposer, si  $(\theta, s_0) \in S^1 \times I$ ,  $h(\theta, s_0) = (\theta, s)$ . Désignons par  $\beta_{\theta, \theta'}$  le chemin de  $T^2 \times I$  définit par  $\beta_{\theta, \theta'}(t) = (\theta, t\theta', 0)$ . Soit  $(\theta, \theta', s_0)$  un point de  $T^2 \times I$  muni du feuilletage  $\mathcal{C}_0$ . Le chemin  $\beta_{\theta, \theta'}^{-1}$  (d'origine  $(\theta, \theta', 0)$ ) possède un relèvement suivant le facteur  $I$  au point  $(\theta, \theta', s_0)$  pour le feuilletage  $\mathcal{C}_0$  que nous notons  $\beta_{\theta, \theta', s_0}^{-1}$ . L'extrémité de ce chemin est un point  $(\theta, 0, s'_0)$  de la couronne  $S^1 \times I \times \{0\}$ . Alors si  $h(\theta, s'_0) = (\theta, s')$ , désignons par  $\beta_{\theta, \theta', s'}$  le relèvement suivant le facteur  $I$  du chemin  $\beta_{\theta, \theta'}$  de hauteur  $s'$ , pour le feuilletage  $\mathcal{C}$ . Son extrémité est un point  $(\theta, \theta', s)$ . L'application

$$H : T^2 \times I \rightarrow T^2 \times I \quad \text{telle que } H(\theta, \theta', s_0) = (\theta, \theta', s)$$

applique par construction une feuille de  $\mathcal{C}_0$  sur une feuille de  $\mathcal{C}$ . Puisque  $h$  est un homéomorphisme,  $H$  est un homéomorphisme qui conjugue  $\mathcal{C}_0$  et  $\mathcal{C}$ .

Démonstration du théorème 1.2. : Puisque  $\mathcal{F}$  ne possède pas de composante de Reeb, il vérifie les conditions A et B du théorème 2.3.III ; ses feuilles non compactes ont une holonomie nulle. C'est un feuilletage de Reeb généralisé.

Ainsi, si L est une de ses feuilles non compactes et a un point de L,

$$\pi_1(T^2 \times I; a) / (\pi_1(L, a)) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \text{ ou } \mathbb{Z}$$

i) Si ce groupe quotient est isomorphe à  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  alors toutes les feuilles non compactes sont homéomorphes à  $\mathbb{R}^2$ .  $\mathcal{F}$  est un feuilletage de Reeb et il est conjugué à un feuilletage  $\mathcal{F}'(i, \alpha)$  (remarque 1.2. et [3]).

ii) Si le quotient est isomorphe à  $\mathbb{Z}$ ,  $\pi_1(L, a)$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$ , toutes les feuilles non compactes de  $\mathcal{F}$  sont difféomorphes à  $S^1 \times \mathbb{R}$  et les groupes d'holonomie de chacun des tores  $T^2 \times \{0\}$  et  $T^2 \times \{1\}$  sont isomorphes à  $\mathbb{Z}$ . Soient  $\alpha_k$  et  $\beta_k$  où  $k = 0, 1$  les lacets dans  $T^2 \times \{k\}$  définis par  $\alpha_k(t) = (t, 0, k)$  et  $\beta_k(t) = (0, t, k)$ . On peut définir  $T^2 = S^1 \times S^1$  de telle façon que, si  $\gamma$  est un homomorphisme d'holonomie en  $(0, 0, k)$ , l'image par  $\gamma$  de  $\beta_k$  pour  $k = 0, 1$  soit le germe de l'application identique, les images par  $\gamma$  de  $\alpha_0$  et  $\alpha_1^{(-1)^{1+i}}$ , où  $i = 0, 1$ , soient les germes d'une contraction.

Désignons par  $\phi_k$  et  $\phi_k^0 : T^2 \times I \longrightarrow T^2 \times I$  des voisinages colliers de  $T^2 \times \{k\}$  tels que les images réciproques de  $\mathcal{F}$  et de  $\mathcal{F}'(i, 0)$  respectivement par  $\phi_k$  et  $\phi_k^0$  soient des modèles de tourbillonnement généralisé (lemme 2.1.). On prendra par exemple  $\phi_0^0$  et  $\phi_1^0$  définis par :

$$\phi_0^0(x, t) = (x, t/4) \quad \text{et} \quad \phi_1^0(x, t) = (x, 1-t/4)$$

Et on supposera en outre que les feuilletages induits par les images réciproques  $\phi_k^{-1}(\mathcal{F})$  sur  $T^2 \times \{1\}$  ont pour feuilles les cercles  $\{0\} \times S^1 \times \{1\}$ . D'après le lemme précédent, il existe un homéomorphisme  $H_k$  de  $T^2 \times I$  (pour  $k = 0, 1$ ) qui applique le feuilletage  $\phi_k^{0-1}(\mathcal{F}'(i, 0))$  sur le feuilletage  $\phi_k^{-1}(\mathcal{F})$  et dont la restriction au bord est l'application identique.

Désignons par  $N_k$  l'image de  $\phi_k$  dans  $T^2 \times I$ . Puisque  $\mathcal{F}$  est presque sans holonomie, le théorème 1.1 entraîne que sur  $T^2 \times I - \text{int}(N_0 \cup N_1) = M'$ ,  $\mathcal{F}$  induit

un feuilletage  $\mathcal{F}'$  sans holonomie. Les feuilles de  $\mathcal{F}$  étant propres, celles de  $\mathcal{F}'$  le sont aussi et  $\mathcal{F}'$  est une fibration de  $T^2 \times I$ . Cette fibration est nécessairement triviale ; sa fibre est une couronne qui coupe chacune des composantes connexes  $\partial N_k$  du bord de  $M'$  suivant un cercle.

Ainsi, il existe un difféomorphisme  $H' : T^2 \times [1/4, 3/4] \rightarrow M'$  qui applique le feuilletage induit par  $\mathcal{F}(i,0)$  sur  $T^2 \times [1/4, 3/4]$  sur le feuilletage  $\mathcal{F}'$ . En outre, les restrictions des homéomorphismes  $H_k$  au bord de  $T^2 \times I$  étant des applications identiques, on peut choisir  $H'$  de telle façon que ses restrictions à  $T^2 \times \{1/4\}$  et  $T^2 \times \{3/4\}$  coïncident respectivement avec les restrictions (à ces mêmes sous-variétés) de  $\phi_k \circ H_k \circ \phi_k^{-1}$  pour  $k = 0, 1$ . Ainsi en recollant ces deux dernières applications avec  $H'$  on obtient un homéomorphisme  $H$  de  $T^2 \times I$  qui applique  $\mathcal{F}(i,0)$  sur  $\mathcal{F}$ .

De la même façon que les feuilletages  $f_0$  et  $f_1$  permettent de décrire le type topologique d'un feuilletage de  $T^2$  (ou  $S^1 \times I$ ) les feuilletages  $\mathcal{F}(i,\alpha)$  permettent avec le théorème suivant de décrire le type topologique d'un feuilletage de  $T^3$  (ou de  $T^2 \times I$ ).

Théorème 2.2. : Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage de classe  $r \geq 2$ , transversalement orientable, sans composante de Reeb de  $T^3$  (ou de  $T^2 \times I$ ). Alors ;

i) si  $\mathcal{F}$  ne contient pas de feuilles compactes, il est conjugué à un feuilletage (linéaire) de  $T^3$  défini par une 1-forme d'équation :

$$\omega = \alpha d\theta + \beta d\theta' + \gamma d\theta'' \quad , \quad (\theta', \theta, \theta'') \in T^3$$

où  $\alpha, \beta, \gamma$  sont des réels rationnellement indépendants

ii) si  $\mathcal{F}$  contient au moins une feuille compacte, il est conjugué à un feuilletage  $\mathcal{F}'$  de  $T^3$  (ou  $T^2 \times I$ ) tel que :

- ses feuilles compactes sont des tores  $T^2 \times \{s\}$  où  $s$  appartient à un fermé  $A$  non vide de  $S^1$  (ou  $I$ )

- si  $\{I_k\}_{k \in B}$  ( $B \subset \mathbb{N}$ ) désigne l'ensemble des intervalles ouverts deux à deux disjoints dont la réunion est  $S^1 - A$ , pour tout  $k \in B$ , sur  $T^2 \times \bar{I}_k$   $\mathcal{F}'$  induit un

feuilletage du type  $\mathcal{F}(i_k, \alpha_k)$ , les nombres  $i_k = 0, 1$  et  $\alpha_k \in \mathbb{R}$  pouvant varier avec  $k$ . Cependant  $i_k$  n'est pas nul seulement pour un nombre fini et pair de  $k \in B$ .

Par analogie avec les types de feuilletages de  $T^2$  ou  $S^1 \times I$  ( $\mathcal{F}(I_k, i_k, B)$ ) décrits précédemment nous noterons  $\mathcal{F}(I_k, i_k, \alpha_k, B)$  le type topologique du feuilletage  $\mathcal{F}'$  décrit dans ii).

Démonstration : Le groupe fondamental de la variété étant abélien et le feuilletage ne possédant pas de composante de Reeb, il vérifie les conditions A et B (définition 1.1.III). S'il ne possède pas de feuilles compactes nous avons vu avec le théorème 2.1.III que c'est un feuilletage sans holonomie. Ainsi d'après [19] et [21] il est topologiquement conjugué à un feuilletage linéaire.

Supposons que  $\mathcal{F}$  possède des feuilles compactes et soit  $L_0$  l'une d'elle. En utilisant [21] ou [28], il est facile de montrer que cette feuille est isotope à une fibre de  $T^3 = T^2 \times S^1$ . Ainsi  $\mathcal{F}$  est presque sans holonomie et il nous suffit de montrer le théorème pour un feuilletage de  $T^2 \times I$ . Les arguments qui nous ont permis d'affirmer que  $L_0$  était isotope à une fibre prouve de la même façon que toute feuille compacte de  $\mathcal{F}$  est isotope à une sous-variété  $T^2 \times \{s\}$ . De la même façon que dans la démonstration du théorème 1.3.III, on montre en utilisant le lemme 2.3.I qu'il existe un  $C^r$ -difféomorphisme  $h$  de  $T^2 \times I$  qui applique les feuilles compactes de  $\mathcal{F}$  sur des sous-variétés  $T^2 \times \{s\}$  où  $s$  appartient à un fermé  $A$  de  $I$ .

Désignons par  $\{I_k\}_{k \in B}$ , ( $N > B$ ) les intervalles ouverts deux à deux disjoints dont la réunion est  $I - A$  et,  $k$  étant fixé, par  $[s_k, s'_k]$  le segment  $\bar{I}_k$ . Sur la sous-variété  $T^2 \times [s_k, s'_k]$ ,  $h(\mathcal{F})$  induit un feuilletage  $\mathcal{F}_k$  presque sans holonomie dont  $T^2 \times \{s_k\}$  et  $T^2 \times \{s'_k\}$  sont les seules feuilles compactes.  $\mathcal{F}_k$  est, d'après le théorème précédent, topologiquement conjugué à un feuilletage  $\mathcal{F}(\alpha_k, i_k)$  par un homéomorphisme dont la restriction au bord est l'application identique. Ainsi  $h(\mathcal{F})$ , donc  $\mathcal{F}$  est topologiquement conjugué à un feuilletage du type  $\mathcal{F}(I_k, \alpha_k, i_k, B)$  par un homéo-

morphisme H.

Supposons que  $i_k = 1$  pour  $k \in B'$  un sous-ensemble infini de B. Alors il existe deux suites de points de  $T^3$  (ou  $T^2 \times I$ ),  $\{a_k\}$  et  $\{b_k\}$ , qui convergent vers un même point a telles que pour un même  $k \in B'$  les points  $a_k$  et  $b_k$  appartiennent respectivement à  $H(T^2 \times \{s_k\})$  et  $H(T^2 \times \{s'_k\})$ . Les points  $a_k$  et  $b_k$  ne peuvent pas être joints par un segment transverse au feuilletage puisqu'un champ qui oriente le feuilletage est rentrant ou sortant simultanément sur chacune de ces feuilles. Mais ceci contredit le fait qu'un arc de normale issue de a coupe ces deux feuilles dès que  $k' \in B$  est suffisamment grand.

Remarque 2.2. : Ce théorème ne permet pas de décrire comment les  $\alpha_k$  qui interviennent dans  $\mathcal{F}(I_k, i_k, \alpha_k, B)$  varient avec  $k \in B$ . Cependant pour des raisons de différentiabilité du feuilletage ils ne peuvent pas être arbitraires. Si  $\alpha_k = \alpha$  est constant alors le type  $\mathcal{F}(I_k, i_k, \alpha_k, B)$  est représentable par une  $\alpha$ -suspension d'un feuilletage f de  $T^2$  du type  $f(I_k, i_k, B)$  défini de la façon suivante : soit f un feuilletage du type  $f(I_k, i_k, B)$  de  $T^2$  invariant par la rotation  $r_\alpha$

$$r_\alpha(\theta, \theta') = (\theta + \theta, \theta') \text{ où } (\theta, \theta') \in T^2 = S^1 \times S^1$$

Le feuilletage  $\mathcal{F}$  obtenu en identifiant les bords  $T^2 \times \{0\}$  et  $T^2 \times \{1\}$  de  $T^2 \times I$  muni du feuilletage  $f \times I$  par  $r_\alpha$  est une  $\alpha$ -suspension de f.

### 3. Conjugaison des feuilletages analytiques de $T^3$ (ou $T^2 \times I$ ).

Un feuilletage linéaire de  $T^3$  étant une suspension d'un feuilletage linéaire de  $T^2$ , dans le cas analytique, le théorème 2.2. peut-être précisé de la façon suivante :

Théorème 1.2. : *Un feuilletage analytique de  $T^3$  transversalement orientable est topologiquement conjugué à une suspension d'un feuilletage analytique de  $T^2$  modifiée par un nombre fini de tourbillonnements de Reeb.*

Avant d'aborder la démonstration de ce théorème précisons un résultat établi par S.P. Novikov dans [13].

Lemme 1.3. : Soit  $\phi : D^2 \times S^1 \longrightarrow C \subset M^3$  une composante de Reeb d'un feuilletage analytique, transversalement orientable d'une variété  $M^3$ . Alors, quel que soit le voisinage  $V$  de  $C$  dans  $M^3$ , il existe un plongement

$$\phi_2 : D_2^2 \times S^1 \longrightarrow V \subset M^3 \text{ (où } D_2^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 / \|x\| \leq 2\})$$

et un feuilletage  $\mathcal{F}'$  de classe  $C^\infty$  de  $M^3$  tels que :

- i)  $\phi_2$  est un prolongement de  $\phi$  et  $V$  est un voisinage de l'image  $C_2$  de  $\phi_2$ .
- ii) Le feuilletage  $\mathcal{F}$  est transverse à  $\partial C_2$ ,  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}'$  coïncident sur  $M^3 - \text{int } C_2$ .
- iii) Les images réciproques de  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}'$  par  $\phi_2$  sont respectivement le feuilletage  $\mathcal{R}$  et le feuilletage trivial de  $D_2^2 \times S^1$ .

Ainsi le feuilletage  $\mathcal{F}$  se déduit de  $\mathcal{F}'$  par un tourbillonnement de Reeb. Ainsi l'opération "d'effacement" d'une composante de Reeb est définie pour les feuilletages analytiques des trois-variétés. Si un couple  $(\phi'_2, \mathcal{F}'')$  satisfait aux propriétés i) ii) iii), dès que  $V$  est suffisamment petit, les feuilletages  $\mathcal{F}'$  et  $\mathcal{F}''$  sont topologiquement conjugués. Cette dernière remarque justifie l'énoncé du théorème précédent.

Démonstration : Supposons qu'un champ normal au feuilletage est rentrant sur le bord  $\partial C$  de la composante de Reeb et soit  $\tau^\varepsilon : \pi_1(\partial C, a) \longrightarrow \mathcal{G}^\omega$  avec  $\varepsilon = +, -$ , les homomorphismes d'holonomie positives et négatives au point  $a = \phi(x, 0) \in \partial C$ . Soit  $\alpha_0$  le lacet en  $a$  qui correspond à  $\phi(\partial D^2 \times \{0\})$ . L'image par  $\tau^+$  de  $\alpha_0$  est le germe de l'application identique et,  $\mathcal{F}$  étant un feuilletage analytique, il en est de même pour son image par  $\tau^-$ .

Dans [5], A. Haefliger a montré qu'une feuille compacte d'un feuilletage analytique dont toutes les feuilles ne sont pas compactes est nécessairement isolée dans l'ensemble des feuilles compactes du feuilletage. On peut ainsi appliquer à  $\partial C^-$  la proposition 1.1. : il existe un plongement

$$\phi_1 : T^2 \times I \longrightarrow M^3 \quad \text{où} \quad \phi_1(T^2 \times \{0\}) = \phi(\partial D^2 \times S^1)$$

tel que l'image réciproque de  $\mathcal{F}$  par  $\phi_1$  soit un modèle de tourbillonnement  $\mathcal{C}$ .

On peut naturellement supposer que l'image de  $\phi_1$  est contenue dans  $V$ . L'application obtenue en recollant  $\phi$  et  $\phi_1$  le long de  $\partial D_2 \times S^1 \simeq T^2 \times \{0\}$  est un plongement  $\phi_2$  de  $D_2^2 \times S^1$  dont l'image  $C_2$  est incluse dans  $V$ . Les propriétés ii) et iii) sont satisfaites par le feuilletage  $\mathcal{F}'$  obtenu en recollant  $\mathcal{F}/M^3 - \text{int } C_2$  et le feuilletage de  $C_2$  image par  $\phi_2$  de la structure de produit de  $D_2^2 \times S^1$ .

Ce lemme implique qu'en un point  $a \in M^3 - \partial C$  les germes d'holonomie de  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}'$  sont identiques. Ainsi  $\mathcal{F}'$  est un feuilletage  $C^\infty$  de type analytique, c'est à dire qu'en tout point  $a \in \partial M^3$  les germes d'holonomie de  $\mathcal{F}'$  sont analytiques.

Lemme 2.3.: *Un feuilletage analytique, transversalement orientable d'une variété  $M^3$  compacte est  $C^\infty$ -conjugué à un feuilletage de type analytique, transversalement orientable, sans composante de Reeb, modifié par un nombre fini (éventuellement nul) de tourbillonnements.*

Démonstration : Soit  $\mathcal{F}_0$  un feuilletage analytique transversalement orientable d'une variété  $M^3$  compacte. Si  $\mathcal{F}_0$  possède une composante de Reeb, il n'a qu'un nombre fini de feuilles compactes, et par conséquent qu'un nombre fini,  $p$ , de composantes de Reeb. Désignons par  $C_0$  une d'entre elles et par  $\mathcal{F}_1$  le feuilletage obtenu à partir de  $\mathcal{F}_0$  par effacement de  $C_0$ . Deux cas peuvent alors se présenter :

- $\mathcal{F}_1$  possède  $p-1$  composantes de Reeb,
- $\mathcal{F}_1$  possède  $p$  composantes de Reeb.

Dans ce dernier cas,  $\mathcal{F}_1$  possède une composante de Reeb  $C_1$  qui contient  $C_0$  et puis-

que  $\mathcal{F}_1$  est de type analytique il est possible d'effacer  $C_1$  et d'obtenir ainsi un feuilletage  $\mathcal{F}_2$ . Supposons qu'en itérant cette opération nous obtenions une suite infinie de feuilletages  $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_n, \dots$  de  $M^3$  telle que  $\mathcal{F}_{n+1}$  se déduit de  $\mathcal{F}_n$  par effacement d'une composante de Reeb  $C_n$  de  $\mathcal{F}_n$  et pour  $n \geq 0$ ,  $C_n \subset C_{n+1}$ . Les bords  $\partial C_n$  de ces composantes de Reeb sont des feuilles compactes de  $\mathcal{F}_0$ . Or nous avons vu que  $\mathcal{F}_0$  n'a qu'un nombre fini de feuilles compactes. Nous pouvons donc affirmer que, si  $\mathcal{F}_0$  possède  $p$  composantes de Reeb, après un nombre fini d'effacements (successifs) nous obtenons un feuilletage  $\mathcal{F}, C^\infty$ , de type analytique, transversalement orientable qui possède  $p-1$  composantes de Reeb. Ainsi  $\mathcal{F}_0$  est  $C^\infty$ -conjugué à un feuilletage déduit de  $\mathcal{F}$  par un nombre fini de tourbillonnements.

Remarque 1.3. : Pour qu'une variété  $M^3$  possède un feuilletage analytique il est donc nécessaire qu'elle possède des feuilletages  $C^\infty$ , sans composante de Reeb. Ainsi d'après [13] et [17], il existe des feuilletages analytiques sur une trois-variété seulement si cette variété est irréductible et si son groupe fondamental possède des éléments d'ordre infini.

Démonstration du théorème 1.3. : Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage analytique transversalement orientable de  $T^3$ . D'après le lemme précédent  $\mathcal{F}$  est  $C^\infty$ -conjugué à un feuilletage  $\mathcal{F}''$  déduit par un nombre fini de tourbillonnements, d'un feuilletage  $\mathcal{F}'$  de classe  $C^\infty$ , de type analytique, transversalement orientable. Si  $\mathcal{F}'$  a une holonomie nulle, il est topologiquement conjugué à un feuilletage linéaire de  $T^3$  et le théorème est alors démontré.

Supposons que  $\mathcal{F}'$  a une holonomie non nulle. C'est un feuilletage presque sans holonomie (théorème 2.2) et puisqu'il est de type analytique il ne possède qu'un nombre fini,  $p$ , de feuilles compactes. D'après le théorème 2.2 il est du type  $\mathcal{F}(I_k, i_k, \alpha_k, \{1, 2, \dots, p\})$  et nous pouvons supposer que, pour  $k = 1, 2, \dots, p$ ,  $I_k$  est l'intervalle  $(\theta_k, \theta_{k+1})$  de  $S^1$  avec  $\theta_{p+1} = \theta_1$  et que les feuilles compactes de  $\mathcal{F}'$

sont les sous-variétés  $L_k = T^2 \times \{\theta_k\}$  de  $T^3 = T^2 \times S^1$ . Pour achever la démonstration il suffit de montrer que  $\alpha_k = \alpha_{k+1}$  pour  $k = 1, 2, \dots, p-1$  (remarque 2.2). Etudions les germes de  $\mathfrak{F}'$  le long des faces  $L_k$  et  $L_k^+$  de  $L_k$  pour  $k = 2, 3, \dots, p$  en supposant par exemple que  $L_k$  correspond à  $T^2 \times [\theta_{k-1}, \theta_k]$ . Désignons par  $f$  et  $g$  les difféomorphismes (analytiques) locaux d'holonomie en un point  $a$  de  $L_k$  associés à des lacets qui correspondent à  $S^1 \times \{0\} \times \{\theta_k\}$  et  $\{0\} \times S^1 \times \{\theta_k\}$ . On peut toujours choisir ces lacets de telle façon que  $f$  ne soit pas dilatant et que  $g$  soit contractant ( $L_k$  étant une feuille compacte isolée).

Désignons par  $f_+, g_+$  et  $f_-, g_-$  les restrictions respectives de  $f$  et  $g$  à  $R^+$  et  $R^-$ . Le germe de  $f_+$  en zéro est le germe de l'application identique de  $R^+$  si et seulement si celui de  $f_-$  est le germe de l'application identique de  $R^-$  (puisque  $f$  est analytique). Dans ce cas particulier, on a alors  $\alpha_k = \alpha_{k-1} = 0$ . Si  $f$  est aussi une contraction on a vu (remarque 1.2. et [3]) que :

$$\alpha_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k^+(n)}{n} \text{ si } g_+^{k(n)+1} < f_+^n < g_+^{k^+(n)}$$

$$\alpha_{k-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k^-(n)}{n} \text{ si } g_-^{k^-(n)+1} < f_-^n < g_-^{k^-(n)}$$

Mais  $f$  et  $g$  étant des fonctions analytiques, elles ne sont pas infiniment tangentes à l'identité et on a vu (remarque 1.1.I) que

i) Si  $f$  n'est pas tangente à l'identité  $g$  ne l'est pas. Alors

$k^+(n) = k^-(n) = k(n)$  sont déterminés par :

$$g'(0)^{k(n)+1} < f'(0)^n < g'(0)^{k(n)} \text{ et } \alpha_k = \alpha_{k-1} = \frac{\log g'(0)}{\log f'(0)}$$

ii) Si  $f$  est tangente à l'identité à l'ordre  $p-1$ , il en est de même pour  $g$ .

Alors  $k^+(n) = k^-(n) = k(n)$  sont déterminés par :

$$g^{(p)}(0)^{k(n)+1} < f^{(p)}(0)^n < g^{(p)}(0)^{k(n)} \text{ et } \alpha_k = \alpha_{k-1} = \frac{g^{(p)}(0)}{f^{(p)}(0)}$$

## B I B L I O G R A P H I E

- 1 A. DENJOY : Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore : Journal de Math. Vol 11 (1932).
- 2 G. CHATELET, H. ROSENBERG & D. WEIL : The topological classification of locally free  $R^2$  actions on closed orientable 3-manifolds (à paraître)
- 3 G. CHATELET & H. ROSENBERG : Un théorème de conjugaison de feuilletages (à paraître dans les Ann. Inst. Fourier).
- 4 A. HAEFLIGER : Variétés feuilletées. Ann. E. Norm. Sup - Pise - série 3, Vol. 16 . (1962).
- 5 A. HAEFLIGER : Thèse. Structures feuilletées et cohomologie à valeur dans un faisceau de groupoïdes (1958)
- 6 G. JOUBERT & R. MOUSSU : Feuilletage sans holonomie. Comp. rend. Acad. Sci. t. 270, p. 507, (1970)
- 7 N. KOPPELL : Commutings diffeomorphisms. Thèse. (Université de Berkeley) 1967
- 8 E. LIMA : Commuting vector fields on  $S^3$ . Annals of Math. Vol 81 (1965)
- 9 R. MOUSSU : Feuilletage sans holonomie. Comp. Rend. Acad. Sci. t. 270, p. 1308 (1970)
- 10 R. MOUSSU : Feuilletage sans holonomie transverse au bord. Comp. Rend. Acad. Sci. t. 271, p. 15 (1970)
- 10' R. MOUSSU : Feuilletage presque sans holonomie. Comp. Rend. Acad. Sci. t. 272 p. 114 (1971)
- 11 R. MOUSSU & R. ROUSSARIE : Une condition nécessaire pour qu'un feuilletage soit sans holonomie (Comp. Rend. Acad. Sci. t. 271, p. 240 (1970)
- 12 R. MOUSSU & R. ROUSSARIE : Relations de conjugaison et de cobordismes entre certains feuilletages (à paraître);

- 13 S.P. NOVIKOV : Topology of foliations, trudy Mark. Math. Obshch. Vol 14,  
n° 513-83
- 14 G. REEB : Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées.  
Actualités. Scien. Indus. Herman (1952)
- 15 G. REEB : Sur les structures feuilletées de codimension un et sur un théorème  
de Denjoy. Ann. de l'Inst. Fourier (1961)
- 16 H. ROSENBERG : Actions of  $\mathbb{R}^n$  on manifolds. Commentarij Math. Helv. Vol 41  
(1966)
- 17 H. ROSENBERG : Foliations by planes. Topology. Vol 7 (1968)
- 18 H. ROSENBERG & R. ROUSSARIE : Reeb Foliations. Annals of Math 91. (1970)
- 19 H. ROSENBERG & R. ROUSSARIE : Topological equivalence of Reeb foliations.  
Topology. Vol 9. (1970)
- 20 R. ROUSSARIE : Sur les feuilletages des variétés de dimension trois. Thèse. Orsay  
(1969)
- 21 R. ROUSSARIE : Plongements dans les variétés feuilletées et classification  
des feuilletages sans holonomie (à paraître dans Topology)
- 22 R. SACKSTEDER : Some properties of foliations. Ann. de l'Inst. Fourier  
Vol. 14-1(1964)
- 23 R. SACKSTEDER & A. SCHWARTZ : Limite sets of foliations. Ann. de l'Inst.  
Fourier Vol. 15-2. (1965)
- 24 R. SACKSTEDER : Foliations and Pseudo-groups. Ame. Jour. of Math. Vol 87  
(1965)
- 25 SIBENMAN : Detecting open collar neighbourhood.
- 26 J. STALLING : On fibering certain 3-manifolds. Topology of 3 manifolds.  
Princtice Hall (1962)
- 27 D. TISCHLER : On fibering certain foliated manifolds. Topology. Vol 9  
n° 2 (1970)

- 
- 28 F. WALDHAUSEN : Irreducible 3-manifolds which are sufficiently large  
Annals of Math. Vol 87-1 (1968)
- 29 C.T.C. WALL : Homotopy tori and the annulus theorem. Bull London Math. Soc.  
(1969)
- 30 J. WOOD : Foliations of 3-manifolds. Annals of Math. 89 (1969)

